

**BEDEUTUNG UND PROBLEMATIK DER
SUBSTITUTIONSELASTIZITÄT IN DER NEOKLASSISCHEN
THEORIE**

von

Diplom-Volkswirt Wolfgang Harbrecht

aus

Sulz am Neckar

1973

**BEDEUTUNG UND PROBLEMATIK DER
SUBSTITUTIONSELASTIZITÄT IN DER NEOKLASSISCHEN
THEORIE**

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

eines Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

(Dr. rer. pol.)

an der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

vorgelegt

von

Diplom-Volkswirt Wolfgang Harbrecht

aus

Sulz am Neckar

BEDEUTUNG UND PROBLEMATIK DER
SUBSTITUTIONSELASTIZITÄT IN DER NEOKLASSISCHEN
THEORIE

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
(Dr. rer. pol.)
an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
des Friedrich-Alexander-Universitäts-Erzgebirgshaus



Vorgelegt
am

Referent: Prof. Dr. Manfred Neumann
Korreferent: Prof. Dr. Otmar Issing
Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 1973

Inhaltsübersicht

Inhaltsübersicht	Seite I
Vorwort	1

Einführung

Das Konzept der Produktionsfunktion als Grundlage der neoklassischen Theorie	6
--	---

I. Kapitel

Der Begriff der Substitution und die Substitutionselastizität	12
1. Der Substitutionsbegriff	12
2. Grenzrate der Substitution	17
3. Die verschiedenen Definitionen der einfachen Substitutionselastizität	22
4. Die Konzepte der partiellen Substitutionselastizität	34

II. Kapitel

Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Form der Produktionsfunktion	46
1. Einleitung	46
2. Die Kenntnis der Substitutionselastizität als notwendige und hinreichende Bedingung für die Determinierung der Gestalt der Produktionsfunktion	48
3. Das Konzept der Leontief-Produktionsfunktion ($\sigma = 0$)	51
4. Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ($\sigma = 1$)	53

	Seite
5. Die Klasse der CES-Produktionsfunktionen ($\sigma = \text{const.}$)	59
6. Die VES-Produktionsfunktionen ($\sigma = \text{var.}$)	69
7. Zusammenfassung	72

III. Kapitel

Substitutionselastizität und Einkommensverteilung	73
1. Der Zusammenhang zwischen Substitutionselastizität und Einkommensverteilung	73
2. Technischer Fortschritt und Einkommensverteilung	80
3. Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Einkommensverteilung in einem Modell mit endogen determinierter Sparquote	88

IV. Kapitel

Substitutionselastizität und Gleichgewichtswachstum	100
1. Die Ziele der neoklassischen Wachstumstheorie	100
2. Wachstum ohne technischen Fortschritt	103
a) Das einfache Wachstumsmodell von Solow	103
b) Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Existenz eines langfristigen Gleichgewichts	108
c) Der Einfluß der Substitutionselastizität auf die Lage des langfristigen Gleichgewichts	116
3. Wachstum bei technischem Fortschritt	125
a) Die Eigenschaften des langfristigen Gleichgewichts in einem Modell mit induziertem technischem Fortschritt	125

	Seite
b) Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Stabilität des langfristigen Gleichgewichts bei induziertem technischem Fortschritt	134
c) Die technische Fortschritts-grenze im Lichte verschiedener Fortschrittskonzepte	141
d) Gleichgewichtswachstum bei Interpretation der Fortschritts-grenze im Harrod-schen Sinne	148
e) Gleichgewichtswachstum bei endogen determinierter Sparquote	153
4. Bedeutung und Problematik der Substitutionselastizität im neoklassischen Zwei-Sektoren-Modell	158
a) Einführung	158
b) Die Struktur des Zwei-Sektoren-Modells	160
c) Die Existenzbedingungen für ein langfristiges Gleichgewicht im Zwei-Sektoren-Modell	165
d) Die Bedingungen für die Stabilität eines langfristigen Gleichgewichts im Zwei-Sektoren-Modell	171
e) Beurteilung der Ergebnisse aus dem neoklassischen Zwei-Sektoren-Modell	175

V. Kapitel

Ansätze zur Messung der Substitutionselastizität	180
1. Einführung	180
2. Die Schätzung der Substitutionselastizität mit Hilfe von Querschnittsanalysen	182

	Seite
3. Die simultane Messung von Substitutionselastizität und Hicks-neutralem technischem Fortschritt mit Hilfe von Zeitreihenanalysen	187
4. Die Messung der Substitutionselastizität bei nichtneutralem technischem Fortschritt	193
5. Die Überprüfung der angenommenen Konstanz der Substitutionselastizität mit Hilfe des Konzepts der VES-Funktion	198
6. Das "Unmöglichkeitstheorem" von Diamond und McFadden	209
7. Ansätze zur Überwindung des Unmöglichkeitstheorems von Diamond und McFadden	220
a) Der Umgehungsversuch von Sato mit Hilfe des Konzepts der CEDD-Produktionsfunktion	220
b) Die Überwindung des Unmöglichkeitstheorems durch Interpretation der neoklassischen Produktionsfunktion als Ergebnis ökonomischer Verhaltensweisen	229
8. Zusammenfassung	240

VI. Kapitel

Zur Problematik des neoklassischen Kapitalbegriffs	244
1. Das Problem der Messung des Kapitalstocks	244
2. Das Switching und Reswitching von Techniken	252
a) Das Konzept der Faktorpreiskurve	252
b) Switching und Reswitching im Zwei-Sektoren-Modell	258
c) Hinreichende Bedingungen für ein Non-Reswitching im Zwei-Sektoren-Modell	262

	Seite
d) Reswitching von Techniken bei vielen Kapitalgütern	269
e) Reswitching bei zeitlich verbundener Produktion	281
3. Zusammenfassung	289
Literaturverzeichnis	292

V o r w o r t

Wenn es überhaupt berechtigt ist, von einer volkswirtschaftlichen Theorie zu behaupten, daß sie eine umfassende Theorie darstellt, deren Anwendungsbereich nicht auf einen speziellen Problemkreis der Nationalökonomie beschränkt ist, so dürfte das wohl am ehesten für das theoretische Konzept der Neoklassiker zutreffen. Die neoklassische Theorie stellt nämlich ein theoretisches Konzept dar, mit dem es praktisch in jedem Bereich der ökonomischen Theorie gelungen ist, eine tiefere Einsicht in die ökonomisch relevanten Zusammenhänge zu erreichen und neue, wesentliche Erkenntnisse zu gewinnen. Eine geradezu beherrschende Stellung erwarb sich die neoklassische Theorie auf dem Gebiet der Wachstumstheorie, deren heutiger Wissensstand praktisch ausschließlich mit Hilfe des neoklassischen Instrumentariums erworben wurde. Zusammen mit der ebenfalls auf dem neoklassischen Konzept basierenden Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung bietet die neoklassische Theorie heute ein umfassendes, geschlossenes theoretisches Konzept zur Analyse und Erklärung von Produktion, Wachstum und Verteilung in einer Volkswirtschaft.

Wenn die Ergebnisse dieser Theorie heute dennoch in weiten Kreisen als unbefriedigend empfunden werden, so liegt das in erster Linie daran, daß mehr oder weniger alle sozialen Erscheinungen wie die Höhe des wirtschaftlichen Wachstums oder die Verteilung des Einkommens auf die einzelnen Produktionsfaktoren nicht auf soziale Verhaltensparameter zurückgeführt werden können, sondern fast ausschließlich auf Größen zurückzuführen sind, die

entweder auf Grund der in der Volkswirtschaft existierenden Produktionsfunktion technisch bedingt sind oder die als exogen determiniert und damit als von Gott gegeben angesehen werden müssen. Damit wären aber so wichtige ökonomische und soziale Phänomene wie die volkswirtschaftliche Einkommensverteilung oder das wirtschaftliche Wachstum jeglichem menschlichen Einfluß entzogen und müßten als naturgegeben hingenommen werden. Daß eine derartige volkswirtschaftliche Prädestinationslehre den Widerspruch des menschlichen Geistes provozieren muß, braucht wohl kaum besonders erwähnt zu werden.

So wurde denn auch gerade auf dem Gebiet der Wachstumstheorie keine Mühe gescheut, um diesem Dilemma zu entkommen. Daß dabei notwendigerweise die Analyse des technischen Fortschritts in den Mittelpunkt der wissenschaftlichen Forschung geriet, ist nicht verwunderlich, wenn man weiß, daß das säkulare wirtschaftliche Wachstum nach Aussage der neoklassischen Wachstumstheorie ausschließlich von der Wachstumsrate des Arbeitskräftepotentials und der Rate des technischen Fortschritts abhängig ist, und wenn man berücksichtigt, daß die Höhe des technischen Fortschritts für die langfristige Entwicklung der Pro-Kopf-Einkommen sogar von ausschlaggebender Bedeutung ist. Weniger verständlich ist es dagegen, daß über diesen Bemühungen, den Ursachen des technischen Fortschritts auf die Spur zu kommen, die Untersuchung der technischen Bedingungen des volkswirtschaftlichen Produktionsprozesses, die in der makroökonomischen Produktionsfunktion zum Ausdruck kommen und die nicht selten für die Erklärung wirtschaftlicher Zusammenhänge, besonders zur Erklärung der Einkommensverteilung, eher wichtiger sind als der technische Fortschritt, fast völlig vernachlässigt wurde. Die Gestalt der Produktionsfunktion wird nämlich durchweg ebenso als ökonomisch exogen determiniert angenommen wie die Höhe des technischen Fortschritts. Man glaubt allenfalls

zu wissen, daß sie Ausdruck ist von technischen Gesetzen, die der menschlichen Kenntnis bisher noch entzogen sind. Ausdruck finden diese technischen Gesetze in den verschiedenen Parametern der Produktionsfunktion. Mit ihrer Hilfe, wie überhaupt mit der Modellvorstellung einer makroökonomischen Produktionsfunktion, versucht man zumindest die ökonomisch relevanten Charakteristika dieser technischen Eigengesetzlichkeiten in begrenzter Weise zu erfassen und so weiterführende ökonomische Analysen zu ermöglichen.

Einer der zentralen Parameter der in neoklassischen Modellen verwendeten Produktionsfunktion ist die Substitutionselastizität. Mit ihr versucht man, das Ausmaß der substitutiven Beziehungen zwischen den Produktionsfaktoren, deren Annahme eines der Axiome der neoklassischen Modellkonzeption darstellt, zu operationalisieren und quantitativ zu erfassen. Dieses Phänomen der Substitutionalität soll Gegenstand dieser Arbeit sein, wobei naturgemäß die Substitutionselastizität im Mittelpunkt der Erörterungen stehen wird.

Dabei besteht das Ziel der vorliegenden Untersuchung in der Begründung der These, daß eine Größe, die die Leichtigkeit messen soll, mit der ein Faktor durch einen anderen ersetzt werden kann, nicht allein von "technischen" Faktoren abhängen kann und damit ökonomischen Überlegungen unzugänglich sein soll. Vielmehr dürfte wohl kaum bestritten werden, daß für das Ausmaß, in dem ein Faktor durch einen anderen ersetzbar ist, nicht nur die technische Substitutionsmöglichkeit eine Rolle spielen kann, sondern auch das Ausmaß, in dem die gegenseitig substituierbaren Faktoren vorhanden sind oder verfügbar gemacht werden können, von Bedeutung sein muß. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß das Ausmaß der Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren außer von technischen Faktoren auch von Faktoren abhängig sein muß, die eindeutig der ökonomischen

Begriffskategorie zuzuordnen sind. Dabei glauben wir im Verlauf unserer Untersuchung sogar nachweisen zu können, daß solche ökonomischen Faktoren die technischen Gegebenheiten langfristig dominieren und damit die technischen Produktionsbedingungen einer Volkswirtschaft in begrenztem Ausmaß zu lenken vermögen. Das hat aber zur Folge, daß wir das Konzept der substitutionalen Produktionsfunktion, wie es von den Neoklassikern zur Analyse und Erklärung ökonomischer Zusammenhänge verwendet wird, nicht länger allein als Ausdruck der technischen Produktionsbedingungen einer Zeit und damit als Ausdruck technischer Gegebenheiten betrachten müssen, deren Entstehung der menschlichen Kenntnis bisher entzogen sind, sondern vielmehr als Ergebnis der Auswirkung sozio-ökonomischer Verhaltensweisen auf die Produktionstechnik und das technische Wissen einer Zeit interpretieren können.

Wir werden im Verlauf unserer Untersuchung darüber hinaus nachweisen, daß die Substitutionselastizität überhaupt erst durch eine derartige Neuinterpretation der neoklassischen Produktionsfunktion meßbar wird und daß deshalb die gesamte neoklassische Theorie mit dem Konzept der substitutionalen Produktionsfunktion als Grundlage erst dann empirischen Überprüfungen zugänglich ist, wenn man die neoklassische Produktionsfunktion nicht ausschließlich als technisch determiniert und damit als exogen gegeben betrachtet.

Zur Prüfung dieser Thesen ist es zunächst erforderlich, das Wesen der Substituierbarkeit zu umreißen und insbesondere den Begriff der Substitutionselastizität klar zu definieren. Anschließend soll die Bedeutung der Substitutionselastizität in der ökonomischen Theorie aufgezeigt und schließlich die Versuche zur empirischen Bestimmung der Substitutionselastizität erörtert werden.

Dabei werden wir sehen, daß es mit Hilfe dieses Begriffes zwar gelungen ist, in einigen wesentlichen Be-

reichen der ökonomischen Theorie - so vor allem in der Produktions- und Verteilungstheorie - die Einsicht in die ökonomischen Zusammenhänge zu vertiefen, daß sich aber bei wachstumstheoretischen Analysen die Vorstellung bestimmter Substitutionsgrade weniger bewährt hat. Diese Analysen zeigen vielmehr, daß der neoklassische Begriff der Substitutionselastizität bei Mehr-Sektoren-Modellen nicht länger haltbar ist und daß die neoklassische Theorie nach eingehender Prüfung ihrer Aussagefähigkeit auch für eine Ein-Gut-Wirtschaft eher als Parabel zur Beschreibung der Wirklichkeit angesehen werden muß denn als eine Theorie zur Erklärung der dort existierenden Zusammenhänge. Damit besitzt aber auch die Substitutionselastizität letztlich ebenfalls nur eine beschreibende Funktion und nicht den ihr von der neoklassischen Theorie zugesprochenen analytischen und erklärenden Charakter.

Nicht schließen möchte ich, ohne meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. M. Neumann meinen Dank für die vielen Diskussionen und Anregungen auszusprechen, die ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Wenn der wissenschaftliche Wert einer Dissertation wie der vorliegenden angesichts der bedeutenden Namen, die ihre Beiträge zu diesem Wissensgebiet geleistet haben, schon a priori nur äußerst begrenzt sein kann, so stellt die Anfertigung dieser Arbeit für den Verfasser doch eine wesentliche persönliche Bereicherung dar.

Einführung

Das Konzept der Produktionsfunktion als Grundlage der neoklassischen Theorie

Sicherlich kann man sich als Nationalökonom kaum einen komplexeren Bereich als Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen vorstellen als den volkswirtschaftlichen Produktionsprozeß mit seiner verwirrenden Vielfalt von technischen Verfahren und der kaum überschaubaren Heterogenität seiner Güter- und Faktorenmärkte. Soll die Untersuchung dann auch noch die Veränderungen dieses gesamten Prozesses miteinbeziehen, so scheint man vor einer fast unüberwindbaren Aufgabe zu stehen.

Unternimmt man dennoch den Versuch einer wissenschaftlichen Analyse dieses gesamten Komplexes, um gewisse Strukturen und Gesetzmäßigkeiten herauszukristallisieren, so wird man nicht umhin können, von der Heterogenität und Vielschichtigkeit der Wirklichkeit zu abstrahieren und sich in den Bereich der Modellanalyse zu begeben, mit der versucht wird, die Grundzüge der Wirklichkeit in stark vereinfachter Form zu erfassen und daraus die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, von denen die Wirklichkeit beeinflußt und gelenkt wird. Dabei ist leicht einzusehen, daß die Modelle notwendigerweise einen um so höheren Abstraktionsgrad erreichen, je komplexer die durch sie beschriebene Realität selbst ist.

Grundsätzlich ist es natürlich das Recht eines jeden National-Ökonomen, sich sein eigenes Bild von der Wirklichkeit zu machen. Über den Wert oder Unwert des sich so ergebenden Modells kann allein danach geurteilt werden, ob das Modell in sich logisch konsistent ist und inwieweit die daraus abgeleiteten Implikationen mit der Realität vereinbar sind. Daß sich trotzdem oder gerade deswegen im Laufe der Zeit eine gewisse Übereinstimmung in der Vorstellung über die Wirklichkeit eingestellt hat, ist nur allzu verständlich, wenn man bedenkt, daß ein Fortschritt in unserem Wissen nur dann möglich ist, wenn nicht jeder Wissenschaftler in der Suche nach Erkenntnis jeweils

ganz von vorne anfängt, sondern mit seiner Forschung auf einem allgemein oder doch mindestens weitgehend allgemein akzeptierten Wissensstock aufbauen kann.

Ein solches theoretisches Gebäude stellt die neoklassische Theorie dar. Sie vermittelt uns ein vereinfachtes, modellhaftes Bild von den volkswirtschaftlichen Produktionszusammenhängen und den sie beherrschenden Gesetzen. Wenn wir uns in der vorliegenden Arbeit bei der Erörterung einiger Probleme, die sich bei einer Untersuchung des volkswirtschaftlichen Produktions- und Wachstumsprozesses ergeben, auf diese Theorie stützen, so befinden wir uns damit in Gesellschaft mit einer langen Reihe großer Nationalökonomien, die die neoklassischen Modellvorstellungen allgemein bekannt und vertraut gemacht haben. Aus diesem Grunde kann und soll an dieser Stelle auf eine eingehende Begründung der Angemessenheit und Realitätsbezogenheit der neoklassischen Modellvorstellungen verzichtet werden, obwohl natürlich auch diese Theorie im Laufe der Zeit nicht ohne Kritik geblieben ist.

Unzweifelhaft hat die klassische und neoklassische Theorie es vermocht, uns einen bisher unübertroffenen Einblick in die ökonomischen Zusammenhänge zu verschaffen. Diese Einsicht konnte jedoch nur durch die ausschließliche Konzentration auf die für den wirtschaftlichen Ablauf letztlich maßgeblichen Realgrößen gewonnen werden.

Konzentriert man sich bei der Betrachtung des volkswirtschaftlichen Produktionsprozesses auf die von monetären Einflüssen unabhängigen Realgrößen, so läßt sich feststellen, daß einer Vielzahl von Einsatzfaktoren eine ebensolche Fülle von erzeugten Gütern gegenübersteht. Alle diese Güter werden durch bestimmte Produktionsverfahren erzeugt, durch die Art und Menge der dazu erforderlichen Einsatzfaktoren festgelegt sind. Jede Produktion stellt so gesehen also einen systematischen, vom Menschen veranlaßten und gelenkten Umwandlungsprozeß dar, bei dem auf Grund von naturwissenschaftlichen und anderen Gesetzmäßigkeiten sogenannte Inputfaktoren mit Hilfe technischer Verfahren zu einem Output transformiert werden.¹⁾

1) Vgl.: W. Krelle, Produktionstheorie, Tübingen 1969, S. 2

Abstrahiert man nun außerdem von der kaum überschaubaren Heterogenität von Produkten und Faktoren und aggregiert die Gesamtheit der erzeugten Produkte zu einer Globalgröße, dem volkswirtschaftlichen Output, und die Vielzahl der Inputfaktoren zu den Aggregatgrößen Arbeit und Kapital, so läßt sich feststellen, daß die Gesamtheit der erzeugten Güter, der volkswirtschaftliche Output, mit Hilfe technischer Verfahren durch den Einsatz der Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital - des volkswirtschaftlichen Inputs - erstellt wird, und zwar in der Weise, daß Input und Output ursächlich miteinander so verbunden sind, daß die Höhe des Inputs die Höhe des Outputs determiniert.

Formal gesehen existiert somit ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem erzeugten Output Y und den Einsatzmengen der Faktoren Arbeit N und Kapital K

$$Y = f(K, N)$$

Bezieht sich diese mathematische Funktion auf die technisch effizienten Beziehungen zwischen den Einsatzmengen der Produktionsfaktoren und der Produktionsmenge, so bezeichnen wir sie als Produktionsfunktion. Durch die Definition der Produktionsfunktion als die Funktion, die für jede mögliche Inputkombination die bei einem gegebenen Stand des technischen Wissens maximal erreichbare Produktmenge angibt, erreichen wir, daß die Produktionsfunktion bei einer gegebenen Faktorkombination für den Output nur einen Wert ergibt, also einwertig ist.¹⁾

In dem Konzept der Produktionsfunktion werden die Vorstellungen der Nationalökonomien über den wirtschaftlichen Kombinations- und Produktionsprozeß ausgedrückt, durch den bestimmte Einsatzmengen von Produktionsfaktoren zu einem Produkt transformiert werden. Eine Produktionsfunktion beschreibt somit einerseits

1) Vgl. S. Carlson, A Study on the Pure Theory of Production, London 1939, reprinted New York 1969, S. 14 f

Zur Definition der Produktionsfunktion vergleiche auch P. A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, New York 1965, S. 57 f, und C. E. Ferguson, The Neo-classical Theory of Production and Distribution, Cambridge 1969, S. 7

die gesamte technologische Seite des Kombinations- und Transformationsprozesses von den Faktoren zum Produkt und ist damit Ausdruck des technischen Wissens einer Zeit, andererseits aber gleichzeitig die ökonomischen Gesetze, nach denen die Kombination der Faktoren erfolgt, denen also der volkswirtschaftliche Produktionsprozeß unterworfen ist. Dies gilt insbesondere für die aggregierte oder makroökonomische Produktionsfunktion, die dann vorliegt, wenn es sich bei ihren Argumenten um makroökonomische Aggregatgrößen handelt.

Das Konzept der Produktionsfunktion entspricht den klassischen Vorstellungen über den Produktionsprozeß. Ihre explizite Einführung in die ökonomische Theorie als formales Instrument zur Analyse ökonomischer Probleme erfolgte jedoch erst um die Jahrhundertwende durch Walras, Wicksell und insbesondere Wicksteed.¹⁾ Seither bildet dieses Konzept die Grundlage der neoklassischen Theorie.

Es ist indessen leicht einzusehen, daß der Begriff der Produktionsfunktion allein noch keine speziellen Aussagen über die dem Produktionsprozeß zugrundeliegenden "Gesetze der Produktion" vermitteln kann. Erst durch die formale Erfassung einiger Grundtatsachen, die man in der Wirklichkeit glaubt beobachten zu können und von denen man deshalb annimmt, daß ihre Voraussetzung realistisch ist, wird eine Spezifizierung und Operationalisierung der Produktionsfunktion ermöglicht.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wollen wir uns die Grundannahmen der neoklassischen Produktionstheorie zu eigen machen und daher von folgenden Prämissen ausgehen:²⁾

1. Die Produktionsfaktoren sind homogen und beliebig teilbar
2. Es besteht Substituierbarkeit zwischen den Produktionsfaktoren

1) Vgl.: L. Walras: *Eléments d'Economie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale*, Ed. définitive, Paris, Lausanne 1926; K. Wicksell: *Selected Papers on Economic Theory*, ausgewählt von Erik Lindahl, London 1958, S. 98; P. H. Wicksteed: *An Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution*, London 1894, reprinted London 1932

2) Vgl. dazu z. B. R. M. Solow: *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, in: *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70 (1956), S. 65 - 94

3. Es existieren konstante Niveaugrenzerträge (constant returns to scale)
4. Die Grenzproduktivitäten der Produktionsfaktoren sind positiv und ständig abnehmend
5. Alle ökonomischen Aktivitäten erfolgen unter den Bedingungen der vollständigen Konkurrenz

Aus diesen Annahmen ergeben sich für die Produktionsfunktion folgende mathematische Eigenschaften:

1. Die Produktionsfunktion ist stetig und in allen Argumenten mindestens zweimal differenzierbar
2. Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion sind positiv, ihre zweiten partiellen Ableitungen sind negativ
3. Die Produktionsfunktion ist linear-homogen
4. Die Entlohnung der Produktionsfaktoren richtet sich nach deren Grenzproduktivitäten, d. h. der Reallohnsatz ist gleich dem Grenzprodukt der Arbeit und der Realzins gleich dem Grenzprodukt des Kapitals

Hält man sich außerdem den ökonomischen Gehalt der Produktionsfunktion vor Augen, so ist ersichtlich, daß alle Variablen der Funktion nur positiv oder Null sein können. Die Funktion ist also nur für den Bereich definiert, in dem alle Argumente nicht-negativ sind.

Mit der so spezifizierten Produktionsfunktion besitzen wir ein analytisches Instrument, in dem alle neoklassischen Vorstellungen enthalten sind und das auch formal der Forderung nach Operationalität weitgehend gerecht wird. Denn wir wissen von der Produktionsfunktion nicht nur, daß sie homogen, stetig und differenzierbar ist, wir kennen auch den Verlauf ihrer ersten beiden Ableitungen und damit die Gestalt der Produktionsfunktion selbst. Auf Grund dieser formalen Eigenschaften sind alle Voraussetzungen gegeben, die zu einer fruchtbaren Analyse ökonomischer Zusammenhänge mit Hilfe dieses Konzepts erforderlich sind.

Betrachtet man die oben angeführten Prämissen und die sich daraus ergebenden charakteristischen Eigenschaften der Produktionsfunktion etwas genauer, so wird unmittelbar ersicht-

lich, daß die Annahme der Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren für das Konzept der Produktionsfunktion und für die neoklassische Theorie von zentraler Bedeutung ist. Denn ohne die Voraussetzung substitutionaler Produktionsfaktoren wäre eine Ermittlung partieller Grenzproduktivitäten nicht möglich. Damit würde aber auch die Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung, nach der die einzelnen Produktionsfaktoren nach ihren Grenzproduktivitäten entlohnt werden, jeglicher Grundlage entbehren und eine Erklärung des wirtschaftlichen Wachstums und der Einkommensverteilung auf Grund produktionsbedingter Gesetzmäßigkeiten wohl kaum möglich sein. Die Annahme substitutionaler Produktionsfaktoren stellt somit eine nicht wegzudenkende Voraussetzung für die gesamte klassische und neoklassische Theorie dar. Mit ihr wollen wir uns im Rahmen der folgenden Untersuchung eingehend befassen.

I. Kapitel

Der Begriff der Substitution und die Substitutionselastizität

1. Der Substitutionsbegriff

Mit dem Begriff der Substituierbarkeit von Produktionsfaktoren wird die (klassische) Vorstellung umschrieben, daß die Produktionsfaktoren zur Erstellung eines Produktes nicht notwendig in einem bestimmten, fest fixierten Einsatzverhältnis zueinander stehen müssen, sondern - zumindest in begrenztem Ausmaß - frei variierbar sind. Damit ist zwar die Produktmenge durch eine gegebene Höhe der Faktoreinsatzmengen eindeutig determiniert, doch kann umgekehrt von einer gegebenen Produktmenge nicht auf die Höhe der Einsatzmengen der einzelnen Produktionsfaktoren geschlossen werden, denn ein bestimmtes Produkt kann durch verschiedene Kombinationen der Produktionsfaktoren erzeugt werden. Die Produktionsfaktoren sind gegeneinander austauschbar bzw. substituierbar. Mit dem Begriff der Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren ist also primär die klassische Vorstellung von der Möglichkeit einer Faktorsubstitution verbunden, wobei die klassische Theorie stets von der Möglichkeit einer kontinuierlichen Substituierbarkeit zwischen den Produktionsfaktoren ausgeht.

Diese aus den landwirtschaftlichen Produktionsbedingungen des vorigen Jahrhunderts gewonnene Vorstellung ist sowohl in der neueren betriebswirtschaftlichen Literatur als auch zu einem großen Teil in der Literatur zur ökonomischen Theorie, insbesondere der mikroökonomisch orientierten, stark umstritten. So bestreitet z. B. Erich Gutenberg die Möglichkeit der kontinuierlichen Faktorsubstitution wohl mit Recht für einen bestehenden Industriebetrieb.¹⁾ Analysiert man die Produktion in einem modernen Industriebetrieb, so kann man keine unmittelbaren Beziehungen zwischen Faktoreinsatz und Faktorertrag feststellen. Vielmehr erfolgt die

1) Vgl. E. Gutenberg, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Band I: Die Produktion, 12. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York 1966, S. 312 ff

Produktion mit Hilfe von technischen Aggregaten, wobei die Art der Einsatzfaktoren und deren Verbrauch nur mittelbar von der Ausbringung abhängig ist und zwar über die zwischengeschalteten Produktionsstätten. Die Art der Inputfaktoren sowie die Höhe der Faktoreinsatzmengen sind also durch die Eigenschaften der technischen Aggregate und den daraus resultierenden Verbrauchsfunktionen in eindeutiger Weise bestimmt. Bei einer bestehenden Produktionsapparatur existieren somit limitationale Abhängigkeiten.¹⁾

Es besteht allenfalls die Möglichkeit einer "alternativen" Substitution oder Prozeßsubstitution, d. h. die Möglichkeit der Ersetzung eines Produktionsverfahrens durch ein anderes. In diesem Falle sind aber nicht die Einsatzmengen der vom Substitutionsvorgang betroffenen Faktoren variabel, sondern die Variablen sind die Faktoren selbst, da das ursprünglich zur Produktion erforderliche Faktorenbündel durch ein neues, qualitativ andersartiges Faktorenbündel ersetzt wird. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß an die Stelle der einen limitationalen Produktionsfunktion eine andere, ebenfalls limitationale Produktionsfunktion tritt. Das Kombinationsproblem stellt sich hier somit nicht mehr als ein Problem der kostengünstigsten Kombination der Faktoreinsatzmengen, sondern als ein Problem der Prozeßauswahl, d. h. als das Problem der Auffindung der kostengünstigsten Produktionsfunktion.

Dieser Argumentation kann man entgegenhalten, daß in einem bestehenden Betrieb mit limitationalen Abhängigkeiten zwischen der Vielzahl der betrieblichen Einsatzfaktoren eine alternative Substitution bzw. Verfahrenssubstitution im neoklassischen Licht nichts anderes als eine Faktorsubstitution zwischen den Faktoren Arbeit und Kapital darstellt, da im neoklassischen Konzept der Produktionsfunktion die Vielzahl der in der betriebswirtschaftlichen Produktionsfunktion erscheinenden Inputfaktoren zu den beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital aggregiert sind und daher eine Ersetzung eines bestimmten Einsatzfaktors oder

1) Vgl.: E. Gutenberg, a.a.O. S. 312

einer Faktorgruppe durch einen anderen Faktor oder eine andere Faktorgruppe mit jeweils andersartigen Eigenschaften hier allenfalls als eine "periphere" Ersetzung von Einheiten des Faktors Arbeit durch Einheiten des Faktors Kapital oder umgekehrt erscheint.¹⁾ Von dieser Vorstellung geht auch Erich Schneider aus, wenn er die kontinuierliche Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren dann als gegeben annimmt, wenn "die Unternehmung theoretisch zur Herstellung des gleichen Gutes über eine unendliche Anzahl von Prozessen verfügt, zwischen denen eine kontinuierliche Substitution (Kompensation) möglich ist", wobei er allerdings einschränkend hinzufügt, daß dieser Fall nicht gerade häufig sein dürfte.²⁾

Die neoklassische Konzeption der Produktionsfunktion bezieht sich jedoch primär gar nicht auf die im einzelnen Betrieb bestehenden Zusammenhänge, sondern beschreibt vielmehr nur langfristige Beziehungen volkswirtschaftlicher Art.³⁾ In volkswirtschaftlichen Untersuchungen steht aber nicht ein einzelnes Unternehmen im Mittelpunkt der Betrachtung, sondern die Produktionsverhältnisse einer ganzen "industry" oder der gesamten Volkswirtschaft. Außerdem sind bei einer solchen langfristigen Betrachtungsweise die Produktionsverfahren in den Betrieben nicht fest gegeben, sondern durchaus veränderlich. Damit steht aber die kurzfristig zu beobachtende

1) Gutenberg versteht unter "peripherer" Substitution im Unterschied zur "alternativen" Substitution, die eine Ersetzung eines Faktors oder einer Faktorgruppe durch einen anderen Faktor oder eine andere Faktorgruppe mit jeweils andersartigen Eigenschaften darstellt, eine Ersetzung von Einheiten des einen Faktors durch Einheiten eines anderen Faktors, wobei nur im Grenzfall eine totale Substitution erreicht wird. (Vgl. E. Gutenberg, a.a.O. S. 289 und S. 300) Damit ist mit Gutenbergs Begriff der "peripheren" Substitution nichts anderes als die klassische Vorstellung der Faktorsubstitution gemeint.

2) Vgl.: E. Schneider, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 12. Auflage, Tübingen 1969, S. 169

3) Vgl. M. Neumann, Kapitalbildung, Wettbewerb und ökonomisches Wachstum, Berlin, Heidelberg, New York 1968, S. 15, und A. Marshall, Principles of Economics, 8th Ed. London 1920

Limitationalität des Produktionsprozesses im einzelnen Betrieb durchaus nicht mehr in Widerspruch zu der neoklassischen Vorstellung der kontinuierlichen Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren in der makroökonomischen Produktionsfunktion.

Aus diesen Ausführungen wurde ersichtlich, daß mit dem Übergang der Volkswirtschaften von einer vorwiegend landwirtschaftlichen und kleingewerblichen Produktionsstruktur mit noch relativ geringem technischem Ausreichungsgrad zu der technisch hochentwickelten Produktionsstruktur einer modernen Industriegesellschaft mit ihren weitgehend unteilbaren, auf Massenproduktion ausgerichteten Produktionsstätten auch die Vorstellung von der Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren eine gewisse Wandlung erfahren hat. Sicherlich ist es nicht leicht zu entscheiden, ob angesichts dieser grundlegenden Veränderung der technischen Produktionsbedingungen bei produktionstheoretischen Analysen die Annahme kontinuierlicher Substituierbarkeit zwischen den Produktionsfaktoren noch als genügend realistisch betrachtet werden kann.

Als Kriterium für die Berechtigung dieser Annahme soll daher hier nicht die Frage dienen, inwieweit diese Annahme mit der Wirklichkeit übereinstimmt, da der Begriff der Realitätsbezogenheit doch mehr oder weniger willkürlich interpretierbar ist, sondern die Frage, inwieweit die mit Hilfe dieser Vorstellung deduktiv abgeleiteten analytischen Ergebnisse in sich logisch konsistent und mit der Realität vereinbar sind. Damit wollen wir uns das Wissenschaftsverständnis des kritischen Rationalismus zu eigen machen. Danach ist eine Theoriebildung ohne Abstraktion von gewissen Fakten nicht möglich. Bei den sich auf Grund der Abstrahierung ergebenden Annahmen kommt es dabei nicht auf die Realitätsnähe der Annahmen selbst an, sondern auf die logische Konsistenz und die empirische Bewährung der aus den

Annahmen abgeleiteten Sätze.¹⁾

Die Überprüfung der Substitutionshypothese nach diesen Kriterien ist aber eines der Zentralanliegen dieser Arbeit. Zuvor ist jedoch eine quantitative Konkretisierung des Substitutionsbegriffs erforderlich. Ihr wollen wir uns im folgenden zuwenden.

1) Vgl. M. Neumann, Theoretische Volkswirtschaftslehre, Bd. I: Einführung und Theorie des Volkseinkommens, Heidelberg 1973, S. 65

Zur Beurteilung dieses Wissenschaftsverständnisses vgl. z. B. B. Gahlen, Einige Bemerkungen zum Fortschritt der Wachstumstheorie, in: W. G. Hoffmann (Hrsg.), Untersuchungen zum Wachstum der deutschen Wirtschaft, Tübingen 1971, S. 1 - 50, insbes. S. 2 ff. Die Beurteilung ökonomischer Theorien von der Position des kritischen Rationalismus aus geht vor allem auf Popper und Albert zurück. Vgl. etwa K. R. Popper, Logik der Forschung, 2. erw. Aufl., Tübingen 1966; derselbe, Das Elend des Historizismus, Tübingen 1965; H. Albert (Hrsg.), Theorie und Realität, Ausgewählte Aufsätze zur Wissenschaftslehre der Sozialwissenschaften, Tübingen 1964; derselbe, Traktat über kritische Vernunft, Tübingen 1968

2. Grenzrate der Substitution

Unterstellt man substitutive Beziehungen zwischen den Produktionsfaktoren, so kann - wie wir wissen - eine bestimmte Produktmenge durch verschiedene Faktorkombinationen erzeugt werden. In der Produktionsfunktion $Y = f(K, N)$, von der wir im folgenden ausgehen wollen, sind also die Produktionsfaktoren Kapital K und Arbeit N auch bei konstantem Produkt (Y) variabel. Die Art und Weise, in der die beiden Faktoren bei konstantem Output veränderlich sind, hängt vom Ausmaß ihrer gegenseitigen Substituierbarkeit ab und schlägt sich in der Gestalt der Kurven gleicher Produktmenge bei alternativen Faktoreinsatzrelationen, den Isoquanten, nieder. Die Gestalt der Isoquante ist damit Ausdruck der Substitutionsbeziehungen zwischen Arbeit und Kapital, weshalb die Isoquante auch als die Substitutionsfunktion dieser beiden Produktionsfaktoren bezeichnet werden kann.¹⁾ Über ihren genauen Verlauf kann nur die Erfahrung in jedem konkreten Fall Auskunft geben.

Allgemein läßt sich jedoch feststellen, daß die Isoquanten von neoklassischen Produktionsfunktionen konvex zum Ursprung verlaufen. Diese Eigenschaft der Isoquanten von neoklassischen Produktionsfunktionen ergibt sich als Schlußfolgerung aus den oben angeführten Annahmen der Neoklassiker und aus der ersten und zweiten Ableitung der Substitutionsfunktion.

Die erste Ableitung der Isoquante erhält man aus dem

1) Mit dieser Bezeichnungsweise gehen wir nicht mit der angelsächsischen Bezeichnungsweise konform. Im angelsächsischen Bereich versteht man unter "substitution function" in der Regel die Funktionalbeziehung zwischen dem Faktorpreisverhältnis und der Kapitalintensität. Vgl. z. B. R. Dobell, A Symposium on CES Production Functions: Extensions and Comments; Introductory Remarks, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 50 (1968), S. 443 - 445, hier S. 444, oder C. E. Ferguson, The Neoclassical Theory ..., a.a.O. S. 89. Diese Funktionalbeziehung wird aber z. B. von H. Frisch als "Kapitalintensitätskurve" bezeichnet. Vgl. H. Frisch, Die CES-Funktion, in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. 24 (1964), S. 419 - 444, hier S. 421

totalen Differential der Produktionsfunktion $Y = f(K, N)$:

$$dY = f_K \cdot dK + f_N \cdot dN$$

mit $f_x = \partial Y / \partial x$ und $dY = 0$, da Y auf einer Isoquante konstant ist. Daraus ergibt sich die Isoquantensteigung

$$\frac{dK}{dN} = - \frac{f_N}{f_K}$$

Da per Annahme $f_N > 0$ und $f_K > 0$ ist, ist die Steigung der Isoquante negativ.

Die zweite Ableitung der Isoquante beträgt:¹⁾

$$\frac{d^2 K}{dN^2} = - \frac{1}{f_K^3} (f_{NN} \cdot f_K^2 - 2f_{KN} \cdot f_K \cdot f_N + f_{KK} \cdot f_N^2)$$

Da bei linear-homogenen Funktionen $f_{KN} = - \frac{K}{N} \cdot f_{KK}$ ist,²⁾ ergibt eine Überprüfung des Vorzeichens dieses Ausdrucks,

- 1) Da die Substitutionsfunktion eine implizite Funktion ist, wird die zweite Ableitung mit Hilfe der ersten Ableitung berechnet:

$$\frac{d^2 K}{dN^2} = - \frac{d}{dN} \left(\frac{f_N}{f_K} \right) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{f_N}{f_K} \right) + \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{f_N}{f_K} \right) \cdot \frac{dK}{dN} \right\}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{f_N}{f_K} \right) = \frac{1}{f_K^2} (f_K \cdot f_{NN} - f_N \cdot f_{KN})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{f_N}{f_K} \right) = \frac{1}{f_K^2} (f_K \cdot f_{NK} - f_N \cdot f_{KK})$$

Setzt man diese Ausdrücke sowie den Wert von dK/dN in obige Gleichung ein und berücksichtigt man, daß nach dem Young'schen Lehrsatz $f_{KN} = f_{NK}$ ist, da die Substitutionsfunktion stetig ist, so erhält man nach einigen Umformungen für die zweite Ableitung den oben angegebenen Ausdruck.
Vgl. R. G. D. Allen, Mathematik für Volks- und Betriebswirte, aus dem Englischen übersetzt von E. Kosiol, 3. Aufl., Berlin 1956

- 2) Vgl. R. G. D. Allen, Mathematik ... a.a.O. S. 329 und S. 357

daß wegen der Annahmen $x \in \{f_K, f_N, K, N\} \geq 0$ und $z \in \{f_{NN}, f_{KK}\} < 0$ die zweite Ableitung positiv ist. Die Existenz einer negativen ersten und einer positiven zweiten Ableitung bedeutet aber nichts anderes, als daß die Isoquante konvex zum Ursprung verläuft.

Da die Isoquante als Substitutionsfunktion der beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital betrachtet werden muß, ist es möglich, den Substitutionsgrad zwischen beiden Faktoren mit Hilfe der Tangentensteigung dieser Funktion zu beschreiben. Definiert man den negativen Betrag der Tangentensteigung der Isoquante als Grenzrate der Substitution zwischen Kapital und Arbeit

$$s = - \frac{dK}{dN}$$

so besitzt man nach Allen einen Ausdruck, der die zusätzliche Menge des Faktors Kapital angibt, die von einer gegebenen Faktorkombination ausgehend notwendig ist, um die Produktmenge bei einer Verringerung des Faktors Arbeit um eine Einheit unverändert aufrechtzuerhalten.¹⁾ Da $s = f_N/f_K$ ist, nimmt die Grenzrate der Substitution bei konvexem Verlauf der Isoquante nur positive Werte an ($s > 0$), wobei sich diese mit wachsendem K und sinkendem N ständig erhöhen. Daher resultiert nach Allen aus der Konvexität der Isoquante das Prinzip der zunehmenden Grenzrate der Substitution, d. h. die Annahme, daß es zunehmend schwieriger wird, Arbeit durch Kapital zu ersetzen bzw. Kapital statt Arbeit einzusetzen, falls die Substitution laufend fortgesetzt wird.²⁾

Im Gegensatz zu Allen wird die Grenzrate der Substitution zwischen Kapital und Arbeit heute auch oft so definiert, daß ihr Wert die Anzahl von Einheiten angibt, um die der Einsatz des Faktors Kapital bei einer Erhöhung des Einsatzes des Faktors Arbeit um eine Einheit reduziert werden kann, ohne das Produktions-

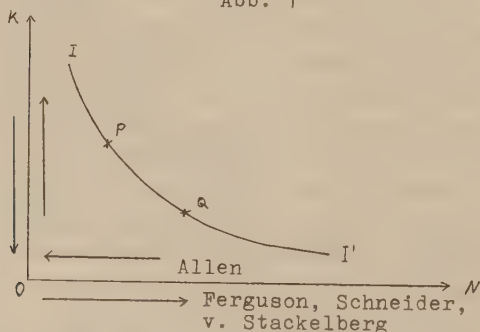
1) Vgl. R. G. D. Allen, Mathematik ..., a.a.O. S. 354

2) Ebenda s. 354

niveau zu verändern.¹⁾ Auf Grund dieser Definition kommt man zum Prinzip der abnehmenden Grenzrate der Substitution, denn es ist unmittelbar einsichtig, daß "die Grenzrate der Substitution des ersten Faktors (K) durch den zweiten Faktor (N) bei fortgesetzter Substitution abnimmt, wenn die Isoquante konvex gegen die Achsen verläuft."²⁾

Die beiden Definitionen unterscheiden sich dadurch voneinander, daß einmal im Nenner der substituierende Faktor steht (bei Ferguson, Schneider und v. Stackelberg) und das andere Mal der substituierte Faktor (bei Allen). Im Schaubild einer Isoquante (Abb. 1) zeigt sich der Unterschied der beiden Definitionen darin, daß Allen bei der Messung der Grenzrate der Substitution den Abszissenfaktor vermindert, also in Richtung Ursprung verändert (von Q nach P), während Ferguson, Schneider und v. Stackelberg den Abszissenfaktor vermehrt einsetzen, also eine Veränderung vom Ursprung weg erfolgt (von P nach Q).

Abb. 1



1) Vgl. C. E. Ferguson, *The Neoclassical Theory ...*, a.a.O. S. 84, aber auch E. Schneider, *Einführung ...*, a.a.O. S. 172 f, und H. v. Stackelberg, *Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre*, 2. Auflage, Tübingen, Zürich 1951, S. 112 ff. Diese Definition der Grenzrate der Substitution kann heute als die allgemein übliche Definition bezeichnet werden, nachdem sie auch von Allen übernommen wurde. Vgl. R. G. D. Allen, *Macro-Economic Theory*, London, New York 1967, Reprint 1968, S. 42.

2) Siehe E. Schneider, *Einführung ...*, a.a.O. S. 173, vgl. auch C. E. Ferguson, *The Neoclassical Theory ...*, a.a.O. S. 89.

Das Ergebnis, das wir mit Hilfe des Begriffs der Grenzrate der Substitution ermitteln konnten, ist die Erkenntnis, daß z. B. bei einer Kapitalintensivierung, d. h. bei einer Substitution von Arbeit durch Kapital, die Grenzrate der Substitution (nach Allens Definition) ständig zunimmt, es also bei fortgesetzter Substitution immer schwieriger wird, Arbeit durch Kapital zu ersetzen. Die Frage ist nun, welche exakte Beziehung zwischen diesen beiden Größen besteht, insbesondere in welchem Verhältnis die Änderungsraten von Kapitalintensität und Grenzrate der Substitution zueinander stehen. Eine Antwort auf diese Frage gibt uns der Begriff der Substitutionselastizität.

3. Die verschiedenen Definitionen der einfachen Substitutionselastizität

Erfasst man den im Prinzip der zu- bzw. abnehmenden Grenzrate der Substitution ausgedrückten Zusammenhang zwischen Faktoreinsatzverhältnis und Grenzrate der Substitution in einer mathematischen Funktion, in der die Höhe der Kapitalintensität in Abhängigkeit von der Grenzrate der Substitution erscheint, so erhält man eine Funktionalbeziehung, die sich graphisch durch eine Kurve mit positiver Steigung darstellen läßt (siehe Abbildung 2).

Die Elastizität dieser Kurve wird als Substitutionselastizität bezeichnet. Die Substitutionselastizität ist demnach definiert als das Verhältnis der relativen Faktoreinsatzmengenänderung zur relativen Änderung der Grenzrate der Substitution:

$$\sigma = \frac{d(\frac{K}{N})/\frac{K}{N}}{ds/s} \quad (1)$$

Ökonomisch interpretiert gibt die so definierte Substitutionselastizität an, um wieviel Prozent sich die Kapitalintensität infolge einer einprozentigen Änderung der Grenzrate der Substitution verändert.

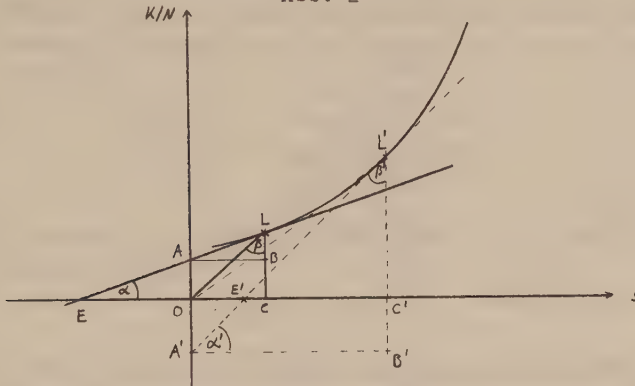
Diese Definition geht auf R. G. D. Allen zurück.¹⁾ Da die Steigung der ihr zugrunde liegenden Kurve positiv ist, ist auch die Substitutionselastizität positiv. Wie später noch genauer gezeigt werden soll, kann die Substitutionselastizität Werte zwischen Null und Unendlich annehmen.

Geometrisch erscheint σ in Abb. 2, in der der Zusammenhang zwischen Kapitalintensität und Grenzrate der Substitution dargestellt ist, als das Strecken-

1) Erstmals wurde diese Definition von Allen 1938 veröffentlicht in "Mathematical Analysis for Economists", London 1938, deutsch: Mathematik für Volks- und Betriebswirte, a. d. Engl. übers. v. E. Kosiol, 3. Aufl., Berlin 1956, S. 354 f

verhältnis AL/EL, OC/EC oder BL/CL.¹⁾

Abb. 2



In Abb. 3 a, in der eine Isoquante der Produktionsfunktion $Y = f(K, N)$ dargestellt ist, gibt σ das Verhältnis der relativen Änderung der Steigung von OP ($\tan \alpha$) zur relativen Änderung der Steigung der Tangente der Isoquante in P ($\tan \beta$) an, wenn der Punkt P sich auf der Isoquante bewegt. Bewegt sich der Punkt P in einem endlichen (statt infinitesimal kleinen) Ausmaß z. B. von A nach B, wie in Abb. 3 b (in der die Koordinatenachsen aus Darstellungsgründen vertauscht sind), so läßt sich die (Bogen-)Substitutionselastizität zwischen diesen beiden Punkten geometrisch ermitteln.²⁾

1) Beweis:

$$\tan \alpha = \frac{d(K/N)}{ds} = \frac{CL}{EC}, \quad \tan \beta = \frac{s}{K/N} = \frac{OC}{CL}$$

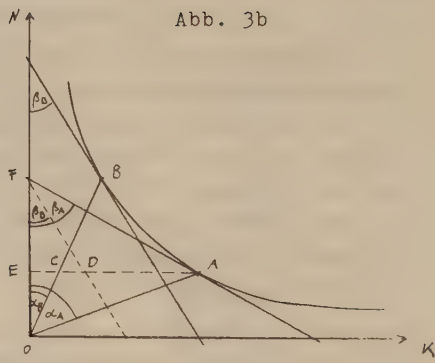
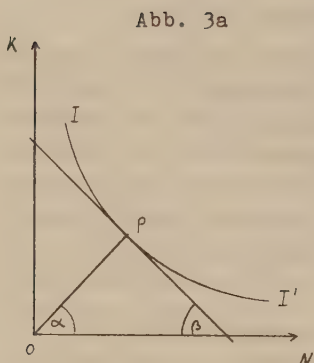
$$\sigma = \frac{d(K/N)}{ds} \cdot \frac{s}{K/N} = \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{CL}{EC} \cdot \frac{OC}{CL} = \frac{OC}{EC}$$

Nach den Strahlensätzen gilt $\frac{OC}{EC} = \frac{AL}{EL} = \frac{BL}{CL}$

In Abb. 2 gilt demnach in Punkt L: $\sigma < 1$
und in Punkt L': $\sigma > 1$

Die Substitutionselastizität nimmt den Wert $\sigma = 1$ an, wenn die Tangente an die Kurve $K/N = \varphi(s)$ durch den Ursprung geht.

- 2) Das folgende Verfahren zur geometrischen Ermittlung der Substitutionselastizität wurde von R. W. Jones 1965 entwickelt. Vgl. R. W. Jones, Neutral Technological Change and the Isoquant Map, in: The American Economic Review, Vol. 55 (1965), S. 848 - 55



In Abb. 3 b stellt $\tan \alpha_A$ die Kapitalintensität in Punkt A $(K/N)_A$ und $\tan \alpha_B$ die nach dem Substitutionsvorgang von A nach B erreichte neue Kapitalintensität im Punkte B $(K/N)_B$ dar. Die absolute Veränderung der Kapitalintensität $\Delta(K/N)$ ist dann gegeben durch die Differenz $(\frac{K}{N})_A - (\frac{K}{N})_B$ oder durch $(\tan \alpha_A - \tan \alpha_B)$.

Wie aus Abb. 3 b zu ersehen ist, ist nun aber $\tan \alpha_A = \frac{AE}{OE}$ und $\tan \alpha_B = \frac{EC}{OE}$. Daher ist die absolute Veränderung

$$\Delta(\frac{K}{N}) = \frac{AE}{OE} - \frac{EC}{OE} = \frac{AC}{OE}$$

Die relative Veränderung der Kapitalintensität ist dann gegeben durch

$$\Delta(\frac{K}{N}) : (\frac{K}{N})_A = \frac{AC}{OE} : \frac{AE}{OE} = \frac{AC}{OE} \cdot \frac{OE}{AE} = \frac{AC}{AE}$$

Die Grenzrate der Substitution s wird in Abb. 3 b durch den Tangens des Winkels β dargestellt. In Punkt A beträgt die Grenzrate der Substitution $s_A = \tan \beta_A$ und in Punkt B $s_B = \tan \beta_B$. Nun ist aber $\tan \beta_A = \frac{AE}{EF}$ und $\tan \beta_B = \frac{ED}{EF}$. Die absolute Veränderung der Grenzrate der Substitution Δs ist daher gegeben durch

$$\Delta s = s_A - s_B = \tan \beta_A - \tan \beta_B = \frac{AE}{EF} - \frac{ED}{EF} = \frac{AD}{EF}$$

und ihre relative Veränderung

$$\Delta s : s_A = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{AE}{EF} = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{EF}{AE} = \frac{AD}{AE}$$

Definiert man die Bogenelastizität der Substitution zwischen den Punkten A und B analog zur obigen Definition als

$$\sigma = \frac{\Delta \left(\frac{K}{N} \right) / \left(\frac{K}{N} \right)_A}{\Delta s / s_A} = \frac{\frac{\tan \alpha_A - \tan \alpha_B}{\tan \alpha_A}}{\frac{\tan \beta_A - \tan \beta_B}{\tan \beta_A}}$$

so beträgt die Substitutionselastizität zwischen Punkt A und B

$$\sigma = \frac{AC/AE}{AD/AE} = \frac{AC}{AD}$$

In Abb. 3b ist die Substitutionselastizität demnach etwas größer als Eins.

Der Begriff der Substitutionselastizität stammt jedoch nicht von Allen, sondern wurde ursprünglich von Hicks schon 1932 als ein wichtiges Instrument der neoklassischen Verteilungstheorie eingeführt.¹⁾ Hicks gab jedoch im Text seines Buches keine präzise Definition, sondern schrieb allgemein: "... the 'elasticity of substitution' is a measure of the ease with which the varying factor can be substituted for others."²⁾ Dagegen findet sich im Appendix seines Buches eine exakte mathematische Definition des Konzepts der Substitutionselastizität, die allerdings ökonomisch nur schwer interpretierbar ist und zudem auch nur für den Fall einer linear-homogenen Produktionsfunktion anwendbar ist. Danach ist die Substitutionselastizität durch den Ausdruck

$$\sigma = \frac{\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial x}{\partial b}}{x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b}} \quad (2)$$

definiert.³⁾ In dieser Definition bezeichnet x die Produktmenge und a und b die Einsatzmengen der Faktoren A und B.

1) Vgl. J. R. Hicks, The Theory of Wages, London 1932, 2. Aufl. London 1963

2) Ebenda S. 117

3) Ebenda S. 245

Wie leicht zu erkennen ist, nimmt σ auch nach dieser Definition nur positive Werte an.¹⁾

Ökonomisch leichter verständlich als diese ersten beiden Konzeptionen ist die Definition der Substitutionselastizität, die Joan Robinson kurz nach Hicks in ihrem Buch "The Economics of Imperfect Competition"²⁾ verwendet hat. Die Substitutionselastizität wird dort definiert als "... the proportionate change in the ratio of the amounts of the factors, divided by the proportionate change in the ratio of their marginal physical productivities."³⁾ Unterstellt man die Bedingungen der vollständigen Konkurrenz, so daß alle Faktoren nach ihren Grenzproduktivitäten entlohnt werden und das Einsatzverhältnis der Faktoren immer so ist, daß das Verhältnis ihrer Grenzproduktivitäten gleich dem Preisverhältnis der Faktoren ist, so mißt die Substitutionselastizität "... the proportionate change in the ratio of the amounts of the factors employed divided by the proportionate change in the ratio of their prices to which it is due ...".⁴⁾

Bezeichnet man den Faktorpreis des Kapitals - den Zinssatz - mit r und den Faktorpreis der Arbeit - den Lohnsatz - mit w , so gibt die Substitutionselastizität zwischen Kapital und Arbeit von Joan Robinson das Verhältnis der relativen Änderung der Kapitalintensität K/N zur relativen Änderung der Zins-Lohn-Relation r/w an. Da von einem Faktor umso weniger eingesetzt wird, je

1) Da bei linear-homogenen Funktionen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b} = - \frac{a}{b} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = - \frac{b}{a} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial b^2}$$

ist und aufgrund der eingangs gemachten Annahmen

$z \in \left\{ \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, x, a, b \right\} \geq 0$ und $\forall \left\{ \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} \right\} \leq 0$ ist, ist $\sigma \geq 0$.

2) J. Robinson, The Economics of Imperfect Competition, London 1933, Reprint London 1959

3) Ebenda S. 330, Anm. 2

4) Ebenda S. 256

höher sein Preis ist, ist dieses Verhältnis negativ. Um als Substitutionselastizität dennoch eine positive Größe zu erhalten, wird dieses Verhältnis mit einem Minuszeichen versehen, so daß die Substitutionselastizität nach Joan Robinson durch den Ausdruck

$$\sigma = - \frac{d(K/N)/\frac{K}{N}}{d(\frac{r}{w})/\frac{r}{w}} = - \frac{d(K/N)/\frac{K}{N}}{d(\frac{r}{w})/\frac{r}{w}} \quad (3)$$

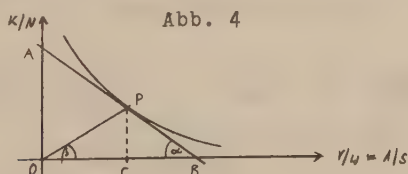
definiert ist. Der Unterschied zur Allen'schen Definition wird sofort ersichtlich, wenn man an Stelle der Zins-Lohn-Relation r/w die Grenzrate der Substitution zwischen Kapital und Arbeit $s = - dK/dN = f_N/f_K = w/r$, wie sie in Allens Definition verwendet wird, einsetzt. Die Robinson'sche Substitutionselastizität nimmt dann die Form an:

$$\sigma = - \frac{d(K/N)/\frac{K}{N}}{d(1/s)/\frac{1}{s}} \quad (3a)$$

Auch die Substitutionselastizität von J. Robinson läßt sich graphisch darstellen. Sie stellt die Elastizität der Funktion

$$\frac{K}{N} = \varphi\left(\frac{r}{w}\right) = \varphi\left(\frac{1}{s}\right)$$

dar. Da die Ableitung dieser Funktion negativ ist, erscheint sie im $(\frac{K}{N}, \frac{r}{w})$ -Koordinatensystem der Abbildung 4 als fallende Kurve.¹⁾



1) Beweis:

$$\frac{d(K/N)}{d(1/s)} = \frac{d(K/N)}{ds} \cdot \frac{ds}{d(1/s)} = \frac{d(K/N)}{ds} : \frac{d(1/s)}{ds}$$

Da auf Grund des Gesetzes von der abnehmenden Grenzrate der Substitution

$$\frac{d(K/N)}{ds} > 0 \text{ ist}$$

und $\frac{d(1/s)}{ds} = - \frac{1}{s^2} < 0$

ist $\frac{d(K/N)}{d(1/s)} < 0$

Der Wert der Substitutionselastizität in einem Punkt P dieser Kurve ist dann gegeben durch das Verhältnis des oberen Tangentenabschnitts zum unteren Tangentenabschnitt, also durch das Streckenverhältnis AP/BP, oder durch das Verhältnis der Abszissenabschnitte OC/BC.¹⁾

Angesichts dieser unterschiedlichen Definitionen der Substitutionselastizität erhebt sich natürlich unmittelbar die Frage, ob die Definitionen von Hicks, Robinson und Allen äquivalent sind oder nicht. Es läßt sich nun zeigen, daß tatsächlich alle drei Definitionen äquivalent sind.

Um dies zu zeigen, soll im folgenden zunächst bewiesen werden, daß die Definitionen von J. Robinson und von Allen identisch sind.²⁾ Ausgangspunkt unserer Beweisführung ist der Zusammenhang zwischen der Grenzrate der Substitution zwischen Kapital und Arbeit $s_{KN} = - dK/dN = f_N/f_K$ und der Grenzrate der Substitution zwischen Arbeit und Kapital $s_{NK} = - dN/dK = f_K/f_N$, nämlich die Beziehung $s_{KN} = 1/s_{NK}$. Bezeichnen wir mit σ_R die Substitutionselastizität, wie sie von J. Robinson definiert wurde, und mit σ_A die Allen'sche Substitutionselastizität, so ist

$$\frac{1}{\sigma_R} = - \frac{1}{\frac{d(K/N)/K}{ds_{NK}/s_{NK}}} = - \frac{ds_{NK}}{d(K/N)} \cdot \frac{K/N}{s_{NK}}$$

Setzt man für $s_{NK} = 1/s_{KN}$, so erhält man

1) Beweis: Wegen

$$\tan \alpha = \frac{d(K/N)}{d(r/w)} = \frac{PC}{BC} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{K/N}{r/w} = \frac{PC}{OC}$$

ist

$$\sigma_R = \frac{d(K/N)}{d(r/w)} \cdot \frac{r/w}{K/N} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{PC}{BC} \cdot \frac{OC}{PC} = \frac{OC}{BC}$$

Nach dem Strahlensatz gilt: $\frac{OC}{BC} = \frac{AP}{BP}$

Diese Art der graphischen Darstellung der Substitutionselastizität stammt von Lerner. Vgl. A. P. Lerner, Notes on Elasticity of Substitution: II. The Diagrammatical Representation, in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 68 - 71. In seinen Ausführungen gibt Lerner auch eine Methode an, mit der die Kapitalintensitätskurve aus einer gegebenen Isoquante geometrisch abgeleitet werden kann.

2) Die folgende Beweisführung geht auf Krelle zurück. Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 106, Anm. 3

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_R} &= - \frac{d(1/s_{KN})}{d(K/N)} \cdot \frac{K/N}{s_{NK}} = - \frac{d(1/s_{KN})}{ds_{KN}} \cdot \frac{ds_{KN}}{d(K/N)} \cdot \frac{K/N}{s_{NK}} \\ &= \frac{1}{s_{KN}} \cdot \frac{ds_{KN}}{d(K/N)} \cdot \left(\frac{K}{N}\right) \cdot s_{KN} = \frac{ds_{KN}}{d(K/N)} \cdot \frac{K/N}{s_{KN}} = \frac{1}{\frac{d(K/N)/K}{ds_{KN}/s_{KN}}} = \frac{1}{\sigma_A}\end{aligned}$$

oder $\sigma_R = \sigma_A$.

Damit ist bewiesen, daß die Definitionen von Robinson und Allen formal identisch sind.

Etwas schwieriger ist der Beweis, daß auch die Hicks'sche Definition der Substitutionselastizität mit den beiden Definitionen von Allen und Robinson formal übereinstimmt. Da Hicks die Substitutionselastizität mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Produktionsfunktion definiert, ist es zunächst erforderlich, die Definitionen von Allen und Robinson so umzuformen, daß sie ebenfalls direkt auf die partiellen Ableitungen der Produktionsfunktion zurückgeführt sind. Da beide Definitionen formal identisch sind, wählen wir als Ausgangspunkt die Allen'sche Definition.

Geht man davon aus, daß

$$d\left(\frac{K}{N}\right) = \frac{NdK - KdN}{N^2}$$

und

$$ds(K, N) = \frac{\partial s}{\partial K} \cdot dK + \frac{\partial s}{\partial N} \cdot dN$$

ist, und berücksichtigt man, daß

$$dK = - \frac{f_N}{f_K} \cdot dN = - s \cdot dN$$

ist, so ergibt sich für

$$d\left(\frac{K}{N}\right) = - \frac{s \cdot N + K}{N^2} \cdot dN$$

und für

$$ds = - \left(s \cdot \frac{\partial s}{\partial K} - \frac{\partial s}{\partial N} \right) \cdot dN$$

Nach Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in die Allen'sche Definitionsgleichung für die Substitutionselastizität (Gleichung 1), erhält man den Ausdruck:

$$\sigma = \frac{s}{K \cdot N} \cdot \frac{s \cdot N + K}{s \cdot \frac{\partial s}{\partial K} - \frac{\partial s}{\partial N}} \quad (4)$$

Damit besitzen wir für σ eine Form, in welcher der Wert von σ durch die partiellen Ableitungen der Grenzrate der Substitution ausgedrückt ist. Berücksichtigt man, daß

$$-\frac{ds}{dN} = \frac{d^2K}{dN^2} = s \cdot \frac{\partial s}{\partial K} - \frac{\partial s}{\partial N}$$

ist, so läßt sich Gleichung (4) auch in der Form

$$\sigma = \frac{s}{K \cdot N} \cdot \frac{s \cdot N + K}{d^2K/dN^2} \quad (4a)$$

schreiben.

Errechnet man dagegen die beiden Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial K}$ und $\frac{\partial s}{\partial N}$ explizit, so erhält man für

$$\frac{\partial s}{\partial K} = \frac{\partial \left(\frac{f_N}{f_K} \right)}{\partial K} = \frac{f_K \cdot f_{NK} - f_N \cdot f_{KK}}{f_K^2}$$

und für

$$\frac{\partial s}{\partial N} = \frac{\partial \left(\frac{f_N}{f_K} \right)}{\partial N} = \frac{f_K \cdot f_{NN} - f_N \cdot f_{KN}}{f_K^2}$$

Setzt man diese Beziehungen in Gleichung (4) ein, so erhält man nach einigen Umformungen eine Beziehung, in der die Substitutionselastizität direkt durch die partiellen Ableitungen der Produktionsfunktion ausgedrückt wird, nämlich:

$$\sigma = - \frac{f_K \cdot f_N (f_K \cdot K + f_N \cdot N)}{K \cdot N (f_{NN} \cdot f_K^2 - 2f_{KN} \cdot f_K \cdot f_N + f_{KK} \cdot f_N^2)} \quad (5)$$

Diese Beziehung gilt ganz allgemein für alle Produktionsfunktionen, die mindestens zweimal differenzierbar sind.

Setzt man zusätzlich voraus, daß die Produktionsfunktion linear-homogen ist, so nimmt σ eine einfachere Form an. Da bei einer linear-homogenen Funktion $f_{KK} = -\frac{N}{K} \cdot f_{KN}$ und $f_{NN} = -\frac{K}{N} \cdot f_{KN}$ ist und nach dem Euler'schen Lehrsatz gilt: $Y = f_K \cdot K + f_N \cdot N$, erhält man in diesem Fall für σ

$$\sigma = \frac{f_K \cdot f_N}{Y \cdot f_{KN}} \quad (5a)$$

oder bei Verwendung der Hicks'schen Bezeichnungsweise für

die Produktmenge (x) und die partiellen Ableitungen der Faktoren a und b:

$$\sigma = \frac{\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial x}{\partial b}}{x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b}}$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als die Hicks'sche Definitionsgleichung für die Substitutionselastizität.

Damit ist bewiesen, daß die Definitionen der Substitutionselastizität von Robinson, Allen und Hicks für den Fall einer linear-homogenen Produktionsfunktion formal identisch sind. Außerdem ist ersichtlich, daß die Definitionen von Allen und Robinson allgemeiner sind als die von Hicks, da sich ihr Anwendungsbereich generell auf alle differenzierbaren Produktionsfunktionen erstreckt, während die Definition von Hicks nur für die engere Gruppe der linear-homogenen Produktionsfunktionen Gültigkeit besitzt.

Fragt man trotz der formalen Übereinstimmung aller drei Definitionen nach deren Zweckmäßigkeit, so verdient nach Auffassung des Verfassers auf Grund des ökonomischen Aussagegehalts die Definition von J. Robinson den Vorzug, da sie den Sinn der Definition am einfachsten und anschaulichsten wiedergibt. Wie Lerner und Kahn gezeigt haben, schwebte auch Hicks bei seiner Definition dieser ökonomische Aussagegehalt vor.¹⁾

Mit Hilfe dieser algebraischen Umformungen ist es jedoch nicht nur möglich, die Äquivalenz der Definitionen von Allen, Robinson und Hicks nachzuweisen, sondern sie bilden gleichzeitig die formale Grundlage, aus der sich die Eigenschaften der Substitutionselastizität erkennen lassen.²⁾

So ist als erstes festzuhalten, daß der Wert der Substitutionselastizität zwischen Kapital und Arbeit in einem

1) Vgl. A. P. Lerner, Notes ... a.a.O., und R. F. Kahn, Notes on Elasticity of Substitution: III. The Elasticity of Substitution and the Relative Share of a Factor, in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 72 - 78

2) Zu den folgenden Darlegungen vgl. auch R. G. D. Allen, Mathematik ... a.a.O., S. 356, und C. E. Ferguson, The Neoclassical Theory ... a.a.O., S. 91 f

bestimmten Punkt einer Isoquante gleich dem Wert der Substitutionselastizität zwischen Arbeit und Kapital in diesem Punkt ist. Es gilt also $\sigma_{KA} = \sigma_{AK}$.

Dieses Ergebnis folgt aus Beziehung (5), in der man ohne weiteres die Faktoren K und N sowie die entsprechenden Ableitungen vertauschen kann, ohne daß sich am Wert der Substitutionselastizität etwas ändert. Da die Beziehung (5) aus der allgemeinen Form der Produktionsfunktion abgeleitet wurde, besitzt diese Eigenschaft generellen Charakter und gilt damit nicht etwa nur für linear-homogene Produktionsfunktionen. Es existiert somit kein "Symmetrieproblem", wie es von Tarshis und Machlup aufgeworfen wurde.¹⁾

Weiterhin kann festgestellt werden, daß die Höhe der Substitutionselastizität umgekehrt proportional zur Krümmung der Isoquante ist. Da die Krümmung der Isoquante durch die zweite Ableitung der Substitutionsfunktion bestimmt ist und - wie aus Gleichung (4 a) hervorgeht - die Substitutionselastizität ein positives Vielfaches des reziproken Wertes von d^2K/dN^2 ist, verläuft die Isoquante um so flacher und verändert sich die Grenzrate der Substitution bei einer Substitution von Arbeit durch Kapital um so langsamer, je größer der Wert von σ ist. Der Wert von σ ist also ein Maßstab dafür, mit welcher Leichtigkeit eine bestimmte Produktmenge aufrechterhalten werden kann, wenn ein Faktor durch einen anderen ersetzt wird.

Aus der Beziehung (4 a) läßt sich außerdem der Wertebereich der Substitutionselastizität ermitteln. Für die Größe von σ gibt es zwei Grenzfälle.

Der erste Fall liegt dann vor, wenn die Grenzrate der Substitution bei jeder beliebigen Kapitalintensität gleich bleibt, sich also im Zuge eines Substitutionsprozesses nicht

1) Vgl. L. Tarshis, Notes on the Elasticity of Substitution I, in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 144 - 147, insbes. S. 146 f, und F. Machlup, The Commonsense of the Elasticity of Substitution, in: The Review of Economic Studies, Vol. 2 (1934/35), S. 202 - 213, insbes. S. 210 f
Widerlegt wurden die Ausführungen dieser beiden Autoren und damit das "Symmetrieproblem" von Lerner. Vgl. A. P. Lerner, Further Notes on Elasticity of Substitution: III. The Question of Symmetry, in: The Review of Economic Studies, Vol. 3 (1935/36), S. 150 - 51

verändert. In diesem Fall besitzt die Isoquante die Gestalt einer achsenscheidenden Geraden (die Tangentensteigung ist ja überall konstant), ihre zweite Ableitung (die Veränderung der Grenzrate der Substitution) ist Null und damit die Substitutionselastizität unendlich groß. Ökonomisch würde das bedeuten, daß die beiden Faktoren völlig gegeneinander austauschbar wären und damit zwischen ihnen keinerlei Unterschiede bestehen würden. Praktisch würde in diesem, ökonomisch als irrelevant anzusehenden Fall nur ein Faktor existieren.

Der zweite Grenzfall ist dann gegeben, wenn die beiden Faktoren überhaupt nicht substituiert werden können. Das ist der Fall der limitationalen Produktionsfunktion, in dem das Faktoreinsatzverhältnis technisch fixiert und unveränderlich ist. Die Zunahme eines der Faktoren über dieses Verhältnis hinaus (im Zuge einer partiellen Faktorstärkung) vermag die Produktmenge nicht zu verändern. Die Isoquante bildet in dem betreffenden Punkt einen rechten Winkel, die zweite Ableitung erreicht den Grenzwert Unendlich und die Substitutionselastizität ist deshalb gleich Null.

Abschließend kann gesagt werden, daß die Substitutionselastizität σ in der Regel für verschiedene Faktorkombinationen verschieden und von den Einheiten, in denen Faktoren und Produkt gemessen werden, unabhängig ist. Sie ist eine symmetrische Beziehung zwischen den Faktoren, nimmt im ökonomisch relevanten Bereich¹⁾ nur positive Werte an und liegt zwischen Null und Unendlich, je nach der Leichtigkeit, mit der ein Produktionsfaktor durch den anderen substituiert werden kann. Der Wert der Substitutionselastizität hängt von der Gestalt der Produktionsfunktion ab und ist damit "determined by the technical conditions of production."²⁾

1) Dabei wird als ökonomisch relevanter Bereich der Bereich angesehen, in dem $f_K \geq 0$ und $f_N \geq 0$ ist, in dem also die Grenzrate der Substitution nicht negativ ist.

2) Siehe J. Robinson, The Economics ... a.a.O., S. 256

4. Die Konzepte der partiellen Substitutionselastizität

Im vorigen Abschnitt wurde ein Parameter diskutiert, mit dessen Hilfe die Substitutionsbeziehungen zwischen den Einsatzfaktoren einer Produktionsfunktion beschrieben und quantitativ erfaßt werden können. Da wir von einer Produktionsfunktion mit nur zwei Faktoren ausgegangen waren, war es uns möglich, die gesamten Substitutionsbeziehungen, die sich aus der Annahme substitutionaler Produktionsfaktoren ergeben, durch einen einzigen Parameter, nämlich die (einfache) Substitutionselastizität, zu beschreiben.

Diese vollständige Erfassung aller Substitutionsbeziehungen durch einen einzigen Substitutionsparameter ist jedoch dann nicht mehr möglich, wenn wir eine Produktionsfunktion mit mehr als zwei Faktoren unterstellen. Enthält eine Produktionsfunktion zum Beispiel n Faktoren, deren Einsatzmengen mit $a_1, a_2 \dots a_n$ bezeichnet seien und die alle gegeneinander substituierbar sein mögen, so werden in diesem Fall mit der Annahme substitutionaler Produktionsfaktoren insgesamt $n(n-1)$ Substitutionsbeziehungen unterstellt. Diese hohe Zahl einzelner Substitutionsbeziehungen ergibt sich daraus, daß jeder einzelne Produktionsfaktor durch jeden anderen Faktor ersetzt werden kann, so daß für jeden Produktionsfaktor $n-1$ verschiedene Substitutionsmöglichkeiten bestehen. Für alle n Faktoren existieren somit $n(n-1)$ Substitutionsmöglichkeiten. Dieser Anzahl von Substitutionsmöglichkeiten entsprechend lassen sich insgesamt $n(n-1)$ verschiedene Faktormengen- und Faktorpreisrelationen bilden.

Überträgt man nun, wie W. Scheper es getan hat¹⁾, die Definition der Substitutionselastizität von J. Robinson auf den n -Faktoren-Fall, so kann man $n(n-1)$

1) Vgl. W. Scheper, Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 177 (1965), S. 1 - 21

Substitutionselastizitäten ermitteln, nämlich:

$$\sigma_{ij} = - \frac{d\left(\frac{a_i}{a_j}\right) / \frac{a_i}{a_j}}{d\left(\frac{p_i}{p_j}\right) / \frac{p_i}{p_j}} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ \text{wobei } j = 1, 2, \dots, n \\ i \neq j \end{array} \quad (6)$$

Dabei sind p_i und p_j die Preise der Faktoren i und j . Wegen der angenommenen Entlohnung nach der Grenzproduktivitätstheorie seien sie gleich den Faktorgrenzproduktivitäten f_i und f_j . Berücksichtigt man, daß, wie später noch genau nachgewiesen werden soll, analog zur einfachen Substitutionselastizität auch hier $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ist, so sind im n -Faktoren-Fall noch immer $n(n-1)/2$ verschiedene Substitutionsparameter erforderlich, um mit Hilfe dieses Konzepts die Substitutionsbeziehungen zwischen allen Faktoren vollständig zu erfassen.

Die Substitutionselastizität zwischen den Faktoren i und j erfaßt demnach nur einen kleinen Teil der in der Produktionsfunktion enthaltenen substitutiven Beziehungen und soll deshalb im folgenden als partielle Substitutionselastizität oder Teilelastizität der Substitution bezeichnet werden. Die so definierte partielle Substitutionselastizität gibt die prozentuale Veränderung des Einsatzmengenverhältnisses zweier Faktoren infolge einer einprozentigen Änderung ihrer Faktorpreisrelation an. Damit wird aber nur ein Bruchteil der Wirkung einer Faktorpreisänderung auf die Faktoreinsatzmengen erfaßt, da in der Regel die Änderung eines Faktorpreises die Einsatzmengen aller Faktoren verändern wird, wenn die Minimalkostenkombination der Faktoren verwirklicht wird.

Hält man trotzdem außer dem gerade betrachteten Faktorpaar alle anderen Faktormengen konstant, so gibt σ_{ij} die direkte partielle Substitutionselastizität von D . McFadden an.¹⁾ Die direkte partielle Substi-

1) Vgl. D. McFadden, Constant Elasticity of Substitution Production Functions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 30 (1963), S. 73 - 83

tutionselastizität σ_{ij} "is the elasticity of the input ratio of factors i and j with respect to the marginal rate of substitution of these factors, taken along a fixed isoproduct curve, with all remaining factor quantities fixed."¹⁾ Berücksichtigt man, daß in diesem Fall in dem vollständigen Differential der Produktionsfunktion $x = f(a_1, a_2 \dots a_n)$

$$dx = f_1 da_1 + f_2 da_2 + \dots f_i da_i + f_j da_j + \dots f_n da_n = 0$$

die Veränderung aller Faktoren außer jener der Faktoren i und j Null ist, so läßt sich die McFaddensche Definitionsgleichung für σ_{ij}

$$\sigma_{ij}^D = \frac{\frac{1}{a_i f_i} + \frac{1}{a_j f_j}}{-\frac{f_{ii}}{f_i^2} + 2\frac{f_{ij}}{f_i f_j} - \frac{f_{jj}}{f_j^2}} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots n \\ \text{für } j = 1, 2 \dots n \\ i \neq j \end{array} \quad (7)$$

ohne große Schwierigkeiten aus Gleichung (6) ermitteln.

Ist die Produktionsfunktion linear-homogen, so erhält man daraus durch Umformung den zur einfachen Substitutionselastizität analogen Ausdruck:

$$\sigma_{ij}^D = \frac{x}{a_i a_j} \cdot \frac{-f_{ij}}{f_{ii} f_j^2 - 2f_i f_{ij} f_j + f_{jj} f_i^2} \quad i \neq j \quad (8)$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß ebenso wie für die einfache Substitutionselastizität auch für die direkte partielle Substitutionselastizität ein Symmetrieproblem nicht existiert.

Analog zur direkten partiellen Substitutionselastizität hat McFadden noch eine Schatten-Partialelastizität der Substitution ("Shadow partial elasticity of substitution") definiert, die ebenfalls durch die Übertragung der einfachen Substitutionselastizität auf jeweils ein Faktorpaar definiert ist, wobei aber nicht wie bei der direkten partiellen Substitutionselastizität alle anderen Faktormengen und der Gesamt-

1) Siehe D. McFadden, Constant Elasticity ..., a.a.O. S. 74

output konstant gehalten werden, sondern die Preise dieser Faktoren und die anfallenden Gesamtkosten.¹⁾

Da sich diese partielle Substitutionselastizität aber nicht auf die Produktionsfunktion direkt, sondern auf die dazugehörige Kostenfunktion bezieht, soll in diesem Rahmen nicht weiter auf sie eingegangen werden.

Die direkte partielle Substitutionselastizität ist zwar formal durchaus genauso praktikabel wie die einfache Substitutionselastizität, sie hat jedoch, wie oben schon angedeutet wurde, den entscheidenden Nachteil, daß sie von der recht unrealistischen Annahme ausgeht, daß eine Faktorpreisänderung die Einsatzmengen aller Faktoren, außer den zwei betrachteten, nicht beeinflußt, also unverändert läßt. Die Definition der direkten partiellen Substitutionselastizität hat deshalb nur dann einen ökonomischen Sinn, wenn man z. B. davon ausgeht, daß über die anderen Faktormengen bereits vorher entschieden wurde und ihr Einsatz kurzfristig nicht geändert werden kann.

Läßt man diese Annahme dagegen fallen und geht stattdessen von der realistischeren Vorstellung aus, daß die Änderung eines Faktorpreises die Einsatzmengen aller Faktoren tangiert, so kann bei der isolierten Betrachtung eines Faktorpaares die Produktmenge nicht mehr als konstant angenommen werden. Die Produktmenge kann vielmehr nur noch bei der Gesamtwirkung einer Faktorpreisänderung als konstant angesehen werden, die sich z. B. bei einer Preisänderung des Faktors 1 unter der Voraussetzung, daß alle anderen Faktorpreise unverändert bleiben, nur durch alle $n-1$ partiellen Substitutionselastizitäten σ_{11} , $\sigma_{12} \dots \sigma_{1i-1}$, $\sigma_{ii+1} \dots \sigma_{in}$ gemeinsam beschreiben läßt. Diese Tatsache hat Krelle bei der Definition seiner "totalen Substitutionselastizität" berücksichtigt, die unter der Voraussetzung, daß die Produktmenge gleichbleibt

1) Vgl. D. McFadden, Constant Elasticity ..., a.a.O. S. 73 und S. 76 f

und stets die Minimalkostenkombination verwirklicht ist, den Prozentsatz angibt, um den sich die Einsatzmengenrelation zweier Faktoren i und j verändert, wenn sich der Preis p_i des Faktors i so verändert, daß sich das Preisverhältnis p_i/p_j um ein Prozent ändert, während alle übrigen Faktorpreise konstant bleiben. Die totale Substitutionselastizität ist also definiert als:¹⁾

$$\sigma_{ij} = - \frac{d\left(\frac{a_i}{a_j}\right) / \frac{a_i}{a_j}}{d\left(\frac{p_i}{p_j}\right) / \frac{p_i}{p_j}} \quad (9)$$

unter den Nebenbedingungen

Kostenminimierung: $\pi = \sum_{k=1}^n a_k p_k = \min!$ (9a)

und

Konstanz des Outputs: $x = f(a_1, a_2 \dots a_n) = \bar{x}$ (9b)

wobei $\bar{x} = \text{const.}$

Dabei ist wegen der Voraussetzung der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung für alle k p_k proportional f_k ($p_k \sim f_k$ für $k \in \{1, j\}$).

Auch die totale Substitutionselastizität läßt sich in Ausdrücken der Produktionsfunktion direkt darstellen.²⁾ Die Lösung der Minimalkostenkombination erhält man mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikator-Methode, wenn man die Lagrange-Funktion

$$F = \pi - \lambda [x - \bar{x}] \quad (10)$$

minimiert, in der λ ein Lagrange'scher Multiplikator ist. Setzt man die Ausdrücke für π und x ein, so erhält man die explizite Funktion

$$F = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots p_n a_n - \lambda [f(a_1, a_2 \dots a_n) - \bar{x}] \quad (11)$$

in deren Minimum alle partiellen Ableitungen nach a_k für $k \in \{1, 2 \dots n\}$ und nach λ gleich Null sind:

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = p_k - \lambda f_k = 0 \quad \text{für } k \in \{1, 2 \dots n\} \quad (12)$$

1) Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 109

2) Die folgende Herleitung folgt W. Krelle. Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 109 ff

$$\text{und } \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \bar{x} - f(a_1, a_2 \dots a_n) = 0$$

Daraus erhält man für λ

$$\lambda = \frac{p_k}{F_k} \quad \text{für } k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (13)$$

Sind die Preise p_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) und die Produktmenge $\bar{x}$ bekannt, so hat man für die $n+1$ Unbekannten $a_1, a_2 \dots a_n$ und λ $n+1$ Gleichungen, aus denen sich die Faktormengen $a_1, a_2 \dots a_n$ ermitteln lassen, die unter der Bedingung minimaler Kosten zur Erzeugung der Produktmenge $\bar{x}$ eingesetzt werden. Diese Faktormengen sind, wie die Lösung des Gleichungssystems (12) zeigt, bei gegebener Produktmenge von den Faktorpreisen $p_1, p_2 \dots p_n$ abhängig:

$$a_k = a_k(p_1, p_2 \dots p_n) \quad \text{für } k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (14)$$

Diese Lösung stellt die Nachfragefunktion nach dem Faktor a_k dar. Wie man aus (12) oder (13) erkennen kann, ist die Faktor-Nachfragefunktion homogen vom Grade Null, d. h. eine proportionale Veränderung aller Faktorpreise läßt die Faktornachfrage unverändert. Aus diesem Grunde gilt auch:

$$a_k = \tilde{a}_k\left(\frac{p_1}{p_j}, \frac{p_2}{p_j} \dots \frac{p_n}{p_j}\right) \quad \text{für } k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (15)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach p_1 lautet:

$$\frac{\partial a_k}{\partial p_1} = \frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial (p_1/p_j)} \cdot \frac{\partial (p_1/p_j)}{\partial p_1} = \frac{1}{p_j} \cdot \frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial (p_1/p_j)} \quad (16)$$

Auf Grund von Beziehung (15) ist das Einsatzmengenverhältnis zwischen den Faktoren i und j

$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{\tilde{a}_i\left(\frac{p_1}{p_j}, \frac{p_2}{p_j} \dots \frac{p_n}{p_j}\right)}{\tilde{a}_j\left(\frac{p_1}{p_j}, \frac{p_2}{p_j} \dots \frac{p_n}{p_j}\right)}$$

Die Ableitung dieses Ausdrucks nach p_1/p_j ist

$$\frac{\partial (a_i/a_j)}{\partial (p_1/p_j)} = \frac{a_j \cdot \partial \tilde{a}_i / \partial (p_1/p_j) - a_i \cdot \partial \tilde{a}_j / \partial (p_1/p_j)}{a_j^2}$$

bzw. wenn man Beziehung (16) berücksichtigt:

$$\frac{\partial(a_1/a_j)}{\partial(p_1/p_j)} = \frac{p_j}{a_j} \cdot \left[\frac{\partial a_1}{\partial p_1} - \frac{a_1}{a_j} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial p_1} \right]$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $-(p_1/p_j)/(a_1/a_j)$, so erhält man für die totale Substitutionselastizität σ_{ij}^T

$$\sigma_{ij}^T = - \frac{p_j}{a_j} \cdot \left[\frac{\partial a_1}{\partial p_1} - \frac{a_1}{a_j} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial p_1} \right] \quad (17)$$

wobei $p_1 = \lambda f_1$ ist.

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß die totale Substitutionselastizität von Krelle im Gegensatz zur einfachen und zur direkten partiellen Substitutionselastizität nicht symmetrisch ist. Für die totale Substitutionselastizität gilt vielmehr $\sigma_{ij}^T \neq \sigma_{ji}^T$, so daß bei einer Produktionsfunktion mit n Faktoren insgesamt $n(n-1)$ verschiedene totale Substitutionselastizitäten ermittelt werden können. Ökonomisch gesehen stellt die totale Substitutionselastizität nichts anderes dar als die Summe aus der (negativen) direkten Preiselastizität der Nachfrage nach dem Faktor i (ϵ_{i1}) und der Kreuzpreiselastizität zwischen dem Preis des Faktors i und der Einsatzmenge des Faktors j (ϵ_{ij}), nämlich:

$$\sigma_{ij}^T = - \frac{\partial a_i/a_i}{\partial p_i/p_i} + \frac{\partial a_j/a_j}{\partial p_i/p_i} = \epsilon_{i1} + \epsilon_{ij} \quad (17a)$$

Trotz dieser unmittelbaren Anschaulichkeit hat das Konzept der totalen Substitutionselastizität von Krelle bisher keine weitere Verbreitung in der Literatur gefunden.

Anders als die bisher vorgestellten Konzepte zur quantitativen Erfassung der Substitution bei Produktionsfunktionen mit mehr als zwei substitutionalen Produktionsfaktoren greift das folgende Konzept der

partiellen Substitutionselastizität von Allen¹⁾ nicht auf die Definition der einfachen Substitutionselastizität zurück, sondern weicht von dem bisherigen Definitionsbegriff ab. Die partielle Substitutionselastizität von Allen σ_{ij}^P "ist die relative Änderung der Einsatzmenge des Faktors j bei einer relativen Änderung des Preises des Faktors i dividiert durch den Anteil der Kosten des Faktors i an den Gesamtkosten (α_i), wenn die Minimalkostenkombination für eine vorgegebene Produktionsmenge eingehalten wird";²⁾

$$\sigma_{ij}^P = \frac{1}{\alpha_i} \cdot \frac{da_j}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{a_j} \quad \text{mit } \alpha_i = \frac{a_i p_i}{\sum_{k=1}^n a_k p_k} \quad (18)$$

bei Minimierung der Kosten $\pi = \sum_{k=1}^n p_k a_k = \min!$

und konstantem Output $x = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \bar{x}$

$\bar{x} = \text{const.}$

Allen selbst definiert sein Konzept der partiellen Substitutionselastizität direkt in Termen der Produktionsfunktion, denn auch die partielle Substitutionselastizität von Allen läßt sich in Termen der Produktionsfunktion ausdrücken, wenn man unterstellt, daß im Gleichgewicht die Faktoren nach ihren Grenzproduktivitäten entlohnt werden und die Produktionsfunktion linear-homogen ist. Ist die Produktionsfunktion linear-homogen, so gilt nach dem Eulerschen Theorem

$$x = f_1 a_1 + f_2 a_2 + \dots + f_n a_n = \sum_{k=1}^n p_k a_k = \pi$$

Der Bruchteil an den Gesamtkosten π , der für den Faktor i aufgewendet wird, beträgt demnach

$$\alpha_i = \frac{p_i a_i}{\sum_{k=1}^n p_k a_k} = \frac{f_i a_i}{x} \quad (19)$$

1) Vgl. zu dem Begriff der partiellen Substitutionselastizität von Allen R. G. D. Allen, Mathematik ..., a.a.O. S. 525 f

2) Siehe W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 112

wobei wegen des Eulerschen Theorems gilt: $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

Die Änderung des Einsatzes des Faktors j infolge einer Preisänderung des Faktors i da_j/dp_i erhält man, wenn man sich fragt, wie sich die Faktormengen a_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) verändern, wenn sich der Preis des Faktors i ändert.¹⁾ Um das zu sehen, muß das Gleichungssystem (7) nach p_i abgeleitet werden. Man erhält:²⁾

$$\begin{aligned} f_1 \frac{da_1}{dp_i} + f_2 \frac{da_2}{dp_i} + \dots + f_n \frac{da_n}{dp_i} &= 0 \\ \lambda \cdot \left[f_{11} \frac{da_1}{dp_i} + f_{12} \frac{da_2}{dp_i} + \dots + f_{1n} \frac{da_n}{dp_i} \right] + f_1 \frac{d\lambda}{dp_i} &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ \lambda \cdot \left[f_{i1} \frac{da_1}{dp_i} + f_{i2} \frac{da_2}{dp_i} + \dots + f_{in} \frac{da_n}{dp_i} \right] + f_i \frac{d\lambda}{dp_i} &= 1 \\ \vdots &\vdots \\ \lambda \cdot \left[f_{n1} \frac{da_1}{dp_i} + f_{n2} \frac{da_2}{dp_i} + \dots + f_{nn} \frac{da_n}{dp_i} \right] + f_n \frac{d\lambda}{dp_i} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Dividiert man die letzten n Gleichungen durch λ und ordnet die Summanden um, so kann man obiges Gleichungssystem in Matrix-Schreibweise folgendermaßen schreiben:

1) Mit unserer Herleitung der Ableitung folgen wir Krelle. Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 111

2) Die Ableitung von $\partial F / \partial \lambda = f(a_1, a_2, \dots, a_n) - \bar{x} = 0$ nach p_i ist

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} \cdot \frac{da_1}{dp_i} + \frac{\partial x}{\partial a_2} \cdot \frac{da_2}{dp_i} + \dots + \frac{\partial x}{\partial a_n} \cdot \frac{da_n}{dp_i} = 0$$

wobei $\partial x / \partial a_k = f_k$ ist ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Die Ableitung von $\partial F / \partial a_k = p_k - \lambda f_k = 0$ nach p_i ist

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \left[\lambda \left(\frac{\partial f_k}{\partial a_1} \cdot \frac{da_1}{dp_i} + \frac{\partial f_k}{\partial a_2} \cdot \frac{da_2}{dp_i} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial a_n} \cdot \frac{da_n}{dp_i} \right) + f_k \frac{d\lambda}{dp_i} \right]$$

Diese Ableitung ist für $k = i$ gleich Eins und für alle $k \neq i$, wobei $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, wegen der Annahme, daß alle Preise außer dem Preis des Faktors i konstant bleiben, gleich Null. Schreibt man nun für $\partial f_k / \partial a_j = f_{kj}$, wobei $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, so erhält man das obige Gleichungssystem in der angegebenen Form.

$$\begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\lambda/dp_1}{\lambda} \\ da_1/dp_1 \\ da_2/dp_1 \\ \vdots \\ da_n/dp_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

→ (i+1)te Zeile

Die Lösung von da_j/dp_i ist dann nach der Cramerschen Regel:

$$\frac{da_j}{dp_i} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{F_{ij}}{F} \quad (22)$$

wobei F die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (21) ist:¹⁾

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & \dots & f_n \\ f_1 & f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

und F_{ij} die Adjunkte von f_{ij} in F .

Setzt man (19) und (22) in die Definitionsgleichung (18) ein und berücksichtigt, daß wegen (8) für λ auch p_1/f_1 geschrieben werden kann, so erhält man nach Vereinfachung

$$\sigma_{ij}^P = \frac{x}{a_i a_j} \cdot \frac{F_{ij}}{F} \quad (23)$$

Dieser Ausdruck enthält nur noch Terme der Produktionsfunktion. Gleichzeitig stellt er die Definitionsgleichung dar, die Allen selbst zur Definition seiner partiellen Substitutionselastizität angeführt hat.²⁾

1) F wird auch als die Hessesche Determinante der Produktionsfunktion bezeichnet. Vgl. C. E. Ferguson, *The Neoclassical Theory ...*, a.a.O. S. 108

2) Vgl. R. G. D. Allen, *Mathematik ...*, a.a.O. S. 525
Allen hat demnach sein Konzept der partiellen

Die ökonomische Interpretation dieses Konzepts der partiellen Substitutionselastizität ist nicht so einfach wie die der Konzepte von McFadden und Krelle, denn anstatt nach der Änderung einer Faktormengenrelation infolge einer Änderung einer Faktorpreisrelation fragt man hier nach der Änderung einer Faktormenge auf Grund der Änderung eines Preises. σ_{ij}^P "ist also eine Art Kreuzpreiselastizität der Nachfrage nach einem Faktor bei Kostenminimierung, dividiert durch den Kostenanteil desjenigen Faktors, dessen Preis sich geändert hat."¹⁾

Trotz dieser anderen definitiven Ausgangsbasis gilt wegen der Symmetrie von F $\sigma_{ij}^P = \sigma_{ji}^P$ für $i \neq j$. Außerdem stimmt auch die Allensche partielle Substitutionselastizität wie die anderen Konzepte der partiellen Substitutionselastizität für nur zwei Faktoren mit der einfachen Substitutionselastizität überein. Weiterhin besteht ein formaler Zusammenhang zwischen der Allenschen partiellen Substitutionselastizität und der direkten partiellen Substitutionselastizität von McFadden, den man erhält, wenn man den aus Gleichung (3) abgeleiteten Ausdruck

$$\frac{x}{a_i a_j} = - \frac{(f_{ii} f_j^2 - 2 f_{ij} f_{ij} + f_{jj} f_i^2)}{f_i f_j} \cdot \sigma_{ij}^D$$

in die Allensche Formel (23) einsetzt. Zwischen beiden Substitutionselastizitäten erhält man dann folgende Beziehung:

$$\sigma_{ij}^P = - \frac{(f_{ii} f_j^2 - 2 f_{ij} f_{ij} + f_{jj} f_i^2)}{f_i f_j} \cdot \frac{F_{ij}}{F} \cdot \sigma_{ij}^D$$

Vergleicht man die verschiedenen Konzepte der par-

Anm. 2, Fortsetzung

Substitutionselastizität nur für den Fall einer linear-homogenen Produktionsfunktion definiert.

1) Siehe W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O.
S. 112

tiellen Substitutionselastizität miteinander, so ist festzuhalten, daß die verschiedenen Definitionen der partiellen Substitutionselastizität nicht miteinander identisch sind. Vielmehr handelt es sich hierbei um miteinander konkurrierende Konzepte, wobei je nach ökonomischer Fragestellung eines vor dem anderen den Vorzug verdient. In der ökonomischen Diskussion hat jedoch keines der Konzepte auch nicht entfernt eine solche Bedeutung erlangt wie der Begriff der einfachen Substitutionselastizität, da in die Modelle der ökonomischen Theorie ganz überwiegend Produktionsfunktionen mit nur zwei Faktoren Eingang gefunden haben. Diese geringere Bedeutung des Konzepts der partiellen Substitutionselastizität ist aber auch aus theoretischer Sicht durchaus verständlich, wenn man bedenkt, daß die Annahme von Produktionsfunktionen mit kontinuierlich substituierbaren Faktoren, wie aus unseren Ausführungen zum Begriff der Substituierbarkeit zu ersehen ist, mit zunehmender Zahl der Faktoren unrealistischer und damit fragwürdiger wird. Aus diesen Gründen wollen wir uns auch im weiteren Verlauf der Arbeit auf die Diskussion der einfachen Substitutionselastizität beschränken.

II. Kapitel

Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Form der Produktionsfunktion

1. Einleitung

Nachdem wir uns bisher mit dem Begriff der Substitutionalität von Produktionsfaktoren und den Möglichkeiten ihrer quantitativen Erfassung befaßt haben, wobei im Mittelpunkt der Darlegungen das Konzept der Substitutionselastizität stand, soll nun im Verlauf der nächsten Kapitel die Bedeutung der Annahme substitutionaler Produktionsfaktoren für die ökonomische Theorie dargestellt werden. Diese Darstellung umfaßt im Prinzip einen kurzen Abriß der wesentlichen ökonomischen Erkenntnisse, die auf Grund der Annahme substitutionaler Produktionsfaktoren gewonnen werden konnten. Da, wie wir im ersten Kapitel dieser Arbeit gesehen haben, die Auswirkungen des Grades der Substituierbarkeit zwischen den Produktionsfaktoren auf die Gestalt der Produktionsfunktion mit Hilfe der Substitutionselastizität erfaßt und quantifiziert werden können, gilt es also, im folgenden die Bedeutung der Substitutionselastizität in den verschiedenen ökonomischen Modellen herauszuarbeiten und zu untersuchen, inwieweit die Ergebnisse aus diesen Modellen von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig sind und von ihr beeinflußt werden. Dabei können wir jedoch nicht auf alle Modelle eingehen, in denen in irgendeiner Form das Konzept der Produktionsfunktion zur Anwendung gekommen ist. Vielmehr sind wir gezwungen, uns selektiv auf jene wichtigsten Bereiche der ökonomischen Theorie zu beschränken, deren Aussagen und Ergebnisse entscheidend von der Annahme einer substitutionalen Produktionsfunktion abhängig sind. Zu diesen zentralen Bereichen zählt natürlich in erster Linie die Produktionstheorie selbst. Die Substitutionselastizität spielt aber auch in jenen Bereichen eine zentrale

Rolle, die wie die neoklassische Verteilungstheorie der funktionellen Einkommensverteilung in entscheidendem Maße auf der Produktionstheorie aufbauen, oder die wie die moderne Wachstumstheorie im Prinzip nichts anderes als eine dynamische Erweiterung einer Art makroökonomischer Produktionstheorie darstellen. Wenn wir uns bei der Darstellung der Bedeutung der Substitutionselastizität daher auf die Produktionstheorie, die Verteilungstheorie und die Wachstumstheorie beschränken, so treffen wir damit zwar eine gewisse quantitative Auswahl, durch die jedoch die Bedeutung der Substitutionselastizität keine qualitative Einschränkung erfährt und kein Aspekt der theoretischen Problematik der Konzeption der substitutionalen Produktionsfunktion vernachlässigt wird.

2. Die Kenntnis der Substitutionselastizität als notwendige und hinreichende Bedingung für die Determinierung der Gestalt der Produktionsfunktion

Geht man von der klassischen und neoklassischen Vorstellung aus, daß die Realität des volkswirtschaftlichen Kombinations- und Produktionsprozesses durch eine Produktionsfunktion genügend genau beschrieben werden kann, so taucht natürlich unmittelbar die Frage nach der Gestalt der Produktionsfunktion und nach deren Eigenschaften auf. Dabei genügt es in vielen Fällen nicht, nur die qualitativen Eigenschaften der Produktionsfunktion zu kennen, die sich aus den Grundannahmen der neoklassischen Produktionstheorie ergeben. Vielmehr erfordert sowohl die empirische Überprüfbarkeit dieser Annahmen als auch die Anwendung des Konzepts der Produktionsfunktion in konkreten ökonomischen Modellen oft eine genaue Vorstellung von der Gestalt der Produktionsfunktion.

Auf Grund der neoklassischen Annahmen wissen wir zwar, wie eingangs schon ausgeführt wurde, daß die Produktionsfunktion linear-homogen, stetig und differenzierbar ist und daß ihre ersten partiellen Ableitungen positiv und ihre zweiten partiellen Ableitungen negativ sind. Aus diesen Eigenschaften folgt, daß die Isoquanten der Produktionsfunktion konvex zum Ursprung verlaufen, daß sie radiale Parallelität zum Ursprung aufweisen und daß ihre Entfernung vom Ursprung sich proportional zur Produktionshöhe verhält.

Wir kennen aber auf Grund der neoklassischen Annahmen nicht den genauen Verlauf der Isoquanten, d. h. wir kennen weder ihre genaue Krümmung noch ihre genaue Lage im K,N-Koordinatensystem. Beide Fragen lassen sich letztlich nur empirisch ermitteln. Wir wissen aber aus der Produktionstheorie, daß der Substitutionsparameter in ganz entscheidendem Maße die Lage und Krümmung der Isoquante determiniert. Wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, ist die Substitutionselastizität ein Maß für die Krümmung der Isoquanten.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß bei gegebenem Stand des technischen Wissens die Kenntnis der Substitutionselastizität notwendig und hinreichend für die genaue Determinierung der Gestalt der Produktionsfunktion ist. Dies soll

dadurch geschehen, daß wir für die Substitutionselastizität bestimmte charakteristische Werte annehmen und die dazugehörige Produktionsfunktion deduktiv ableiten.

Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist die Hicks'sche Definition der Substitutionselastizität

$$\sigma = \frac{f_K f_N}{Y \cdot f_{KN}} \quad (1)$$

Diese Definitionsgleichung stellt eine partielle Differentialgleichung in Argumenten der Produktionsfunktion dar, deren Lösung die gesuchte Produktionsfunktion ist. Allerdings ist die Differentialgleichung in dieser Form nicht ohne weiteres lösbar. Es ist daher notwendig, diese Differentialgleichung in eine einfacher lösbare Form umzuformen.¹⁾ Eine andere Form für σ erhalten wir, wenn wir uns die Eigenschaft linear-homogener Funktionen zunutze machen, daß die linear-homogene Funktion $Y = f(K, N)$ auch in der Form $Y = N \cdot g(K/N)$ geschrieben werden kann, wobei $g(K/N) = f(K/N, 1)$ ist.

Verwenden wir statt der Produktionsfunktion $Y = f(K, N)$ die Pro-Kopf-Produktionsfunktion $Y/N = g(K/N)$ und schreiben für

$$\frac{Y}{N} = y; \quad \frac{K}{N} = x; \quad \frac{Y}{K} = z \quad \text{und} \quad \frac{N}{K} = v \quad (2)$$

so kann die Produktionsfunktion $Y = f(K, N)$ auch geschrieben werden als

$$y = g(x) \quad (3)$$

oder als

$$z = h(v)$$

wobei $h(v) = f(N/K, 1)$ ist.

Die Grenzproduktivität des Kapitals ist dann

$$f_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial [N \cdot g(x)]}{\partial K} = N \cdot \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dK} = N \cdot g'(x) \cdot \frac{1}{N} = g'(x) \quad (4)$$

1) Die Umformung der Differentialgleichung (1) in die lösbare Form (7) ist auf verschiedene Weise möglich. Alternative Möglichkeiten zu der Herleitung des Verfassers finden sich bei R. G. D. Allen, *Macro-Economic Theory* a.a.O. S. 48, und bei C. E. Ferguson, *The Neoclassical Theory* ... a.a.O. S. 96 f

und die Grenzproduktivität der Arbeit

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{\partial Y}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N} [N \cdot g(x)] = N \cdot \frac{d}{dx} [g(x)] \cdot \frac{dx}{dN} + g(x) \\ &= g(x) + N \cdot g'(x) \cdot \left(-\frac{K}{N^2}\right) = g(x) - x \cdot g'(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Für die Kreuzableitung f_{KN} erhält man schließlich

$$\begin{aligned} f_{KN} &= \frac{\partial}{\partial N} \left[\frac{\partial Y}{\partial K} \right] = \frac{\partial}{\partial N} [g'(x)] = \frac{d}{dx} [g'(x)] \cdot \frac{dx}{dN} \\ &= g''(x) \cdot \left(-\frac{K}{N^2}\right) = -\frac{1}{N} \cdot x \cdot g''(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Setzt man die Ausdrücke (3) - (6) in die Definitionsgleichung (1) ein, so erhält man für die Substitutionselastizität den Ausdruck

$$\sigma = - \frac{g'(x) [g(x) - x \cdot g'(x)]}{x \cdot g(x) \cdot g''(x)} > 0 \quad (7)$$

Der Wert von σ ist positiv, weil per Annahme $f_K = g'(x) > 0$ und $f_N = g(x) - x \cdot g'(x) > 0$ ist und auch $f_{KN} = - (K/N) f_{KK} = - \frac{1}{N} \cdot x \cdot g''(x) > 0$ ist, da annahmegemäß gilt $f_{KK} < 0$. Gleichzeitig ergibt sich aus diesen Beziehungen, daß die erste Ableitung der Pro-Kopf-Produktionsfunktion positiv und die zweite Ableitung negativ ist.

In Beziehung (7) ist die Substitutionselastizität in der Form einer nichtlinearen Differentialgleichung dargestellt. Allerdings ist der Ausdruck (7) im Gegensatz zu der Definitionsgleichung (1) keine partielle Differentialgleichung mehr, da die Kapitalintensität x die einzige unabhängige Variable ist.

Analog zur obigen Herleitung läßt sich σ auch in Form einer nichtlinearen Differentialgleichung in v ausdrücken:

$$\sigma = - \frac{h'(v) [h(v) - v \cdot h'(v)]}{v \cdot h(v) \cdot h''(v)} \quad (7a)$$

Die Differentialgleichungen (7) und (7a) sind lösbar, wenn man für σ bestimmte Werte vorgibt. Als Lösung erhält man die Klasse der linear-homogenen Produktionsfunktionen, die die vorgegebene Größe der Substitutionselastizität besitzen. Im folgenden sollen nun die verschiedenen Klassen von linear-homogenen Produktionsfunktionen hergeleitet und kurz diskutiert werden.

3. Das Konzept der Leontief-Produktionsfunktion ($\sigma = 0$)

Setzt man in Gleichung (7) $\sigma = 0$ und vernachlässigt die triviale Lösung $g'(x) = 0$, die annahmegemäß ausgeschlossen ist, so erhält man als Lösung die Bedingung:¹⁾

$$g(x) - xg'(x) = 0$$

die ohne Schwierigkeit zu der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d[g(x)]}{g(x)} - \frac{dx}{x} = 0$$

umgeformt werden kann, wenn man $g'(x) = dg(x)/dx$ setzt. Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man durch Integration

$$\log g(x) - \log x = C$$

wobei C die Integrationskonstante ist. Setzt man für $C = \log 1/\alpha$, so erhält man

$$\log g(x) = \log \frac{1}{\alpha} + \log x$$

oder entlogarithmiert

$$g(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot x$$

die Pro-Kopf-Produktionsfunktion mit einer Substitutionselastizität von Null. Analog läßt sich aus (7a) ermitteln:

$$h(v) = \frac{1}{\beta} \cdot v$$

wobei $1/\beta$ ebenfalls eine Integrationskonstante ist. Ersetzt man in den letzten beiden Ausdrücken x , $g(x)$, v und $h(v)$ durch die ursprünglichen Bezeichnungen von (2), so erhält man die Leontief-Funktion in der Form eines Systems linearer Input-Output-Beziehungen:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{\alpha} \cdot K \\ Y &= \frac{1}{\beta} \cdot N \end{aligned} \quad (8)$$

in dem α und β die konstanten Produktionskoeffizienten

1) Mit der folgenden Herleitung der Leontief-Funktion folgen wir Ferguson. Vgl. C. E. Ferguson, The Neo-classical Theory ..., a.a.O. S. 97 f

oder Input-Output-Koeffizienten darstellen, bzw. in der Form:

$$Y = \min \left[\frac{1}{\alpha} \cdot K, \frac{1}{\beta} \cdot N \right] \quad (8a)$$

In einem K, N -Koordinatensystem erscheinen die Isoquanten dieser Produktionsfunktion als rechtwinklig geknickte Geraden mit einer zur Produkthöhe proportionalen Entfernung vom Ursprung. Alle effizienten Punkte liegen auf einer Geraden mit der Steigung α/β , die durch die Eckpunkte der Isoquanten und durch den Ursprung verläuft, und bilden damit die limitationale Produktionsfunktion vom Leontief-Typ. Die Faktoreinsatzrelation ist konstant und die Ersetzung eines Faktors durch einen anderen ausgeschlossen. Ebenfalls ausgeschlossen ist eine partielle Faktorvariation von einer effizienten Kombination zu einer anderen. Jede partielle Faktorvariation von einer effizienten Kombination aus führt zu einer ineffizienten Kombination und das Grenzprodukt des variierten Faktors ist gleich Null. Ist der Ausgangspunkt einer partiellen Faktorvariation dagegen eine nichteffiziente Kombination, so steigt das Produkt solange proportional zur Erhöhung der Faktoreinsatzmenge, bis die richtige Koppelung zu den übrigen vorhandenen Faktoren erreicht ist. Bis zu diesem Punkt ist die Grenzproduktivität des variablen Faktors gleich dem Wert des (konstanten) Produktionskoeffizienten, weil er die Produktion faktisch begrenzt.

Mit diesen Eigenschaften entspricht die Leontief-Funktion nicht den neoklassischen Vorstellungen und ist deshalb in unserem Zusammenhang nur als Grenzfall von Interesse.¹⁾

1) Ausführlicher sind die Eigenschaften der Leontief-Funktion z. B. bei Krelle dargestellt. Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 36 ff

4. Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$(\sigma = 1)$$

Setzt man in Gleichung (7) $\sigma = 1$ und zerlegt den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung in zwei getrennte Brüche, so hat man die Beziehung:¹⁾

$$-\frac{g(x) \cdot g'(x)}{x \cdot g(x) \cdot g''(x)} + \frac{x[g'(x)]^2}{x \cdot g(x) \cdot g''(x)} - 1 = 0$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $-g''(x)$, so erhält man folgende nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$g''(x) + \frac{1}{x} \cdot g'(x) - \frac{1}{g(x)} [g'(x)]^2 = 0$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung ist es zweckmäßig, $g(x)$ durch $e^{u(x)}$ zu ersetzen, wodurch sich obige Gleichung zu der Form

$$u''(x) + \frac{1}{x} \cdot u'(x) = 0$$

vereinfacht. Setzt man außerdem $u'(x) = p(x)$, so erhält man

$$p'(x) + \frac{1}{x} \cdot p(x) = 0$$

oder nach Division durch $p(x)$

$$\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{1}{x} = 0$$

woraus sich durch Integration ergibt²⁾

$$\log p(x) + \log x = C$$

Schreibt man für die Integrationskonstante $C = \log \alpha$, so erhält man nach Umformung

$$\log p(x) = \log \alpha - \log x$$

bzw. entlogarithmiert

$$p(x) = \frac{\alpha}{x}$$

- 1) Die folgende Herleitung der Cobb-Douglas-Funktion folgt ebenfalls Ferguson. Vgl. C. E. Ferguson, The Neoclassical Theory ..., a.a.O. S. 98 f
- 2) Mit dem Zeichen $\log$ ohne besonderen Zusatz ist im folgenden immer der natürliche Logarithmus gemeint. Damit schließen wir uns der in der wirtschaftswissenschaftlichen Fachliteratur überwiegend gebräuchlichen Schreibweise für den natürlichen Logarithmus an.

Setzt man diese Lösung in $u'(x) = p(x)$ ein, so hat man

$$u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\alpha}{x}$$

woraus sich wiederum durch Integration ergibt

$$u(x) = \alpha \log x + \log A$$

wobei $\log A$ wieder eine Integrationskonstante ist.

Setzt man diese Lösung schließlich in die Beziehung $g(x) = e^{u(x)}$ ein, so erhält man

$$g(x) = \exp[\alpha \log x + \log A]$$

bzw. wenn man auf beiden Seiten logarithmiert

$$\log g(x) = \alpha \log x + \log A$$

Berücksichtigt man nun, daß $g(x) = y$ ist, so erhält man, nachdem man entlogarithmiert hat, die Pro-Kopf-Produktionsfunktion mit einer Substitutionselastizität von Eins

$$y = g(x) = A \cdot x^\alpha$$

bzw. nach Einsetzen der ursprünglichen Bezeichnungen für x und $g(x)$

$$\frac{Y}{N} = A \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^\alpha \quad (9)$$

woraus sich wiederum nach einer geringfügigen Umformung die Cobb-Douglas-Funktion

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot N^{1-\alpha} \quad (10)$$

ergibt.¹⁾ Für die Konstanten A und α soll dabei gelten $A > 0$ und $0 < \alpha < 1$. Auf die ökonomische Interpretation dieser Konstanten werden wir weiter unten noch eingehen.

1) Ihren Namen hat diese Funktion von C. W. Cobb und P. H. Douglas, die diese Produktionsfunktion 1928 erstmalig vorstellten, um mit ihrer Hilfe die makroökonomische Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung empirisch zu überprüfen. Vgl. C. W. Cobb und P. H. Douglas, A Theory of Production, in: The American Economic Review, Vol. 18 (1928), Suppl. I, S. 139 - 165

Mit dieser Herleitung haben wir bewiesen, daß die Substitutionselastizität einer linear-homogenen Produktionsfunktion dann und nur dann den Wert Eins annimmt, wenn die Produktionsfunktion die Form $Y = A \cdot K^\alpha \cdot N^{1-\alpha}$ besitzt, also vom Cobb-Douglas-Typ ist.¹⁾

Die Cobb-Douglas-Funktion ist eine neoklassische Produktionsfunktion, deren Isoquanten entsprechend der Funktion

$$K = \left[\frac{Y_0}{A} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \cdot N^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad \text{mit } Y_0 = \text{const}$$

hyperbelartig verlaufen und sich für $K \rightarrow \infty$ und $N \rightarrow \infty$ asymptotisch den Koordinatenachsen annähern. Ihre ersten partiellen Ableitungen

$$f_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \cdot A \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha-1} = \alpha \left(\frac{Y}{K} \right)$$

und

$$f_N = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha) \cdot A \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha} = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{Y}{N} \right)$$

sind positiv, da per Definition alle Größen dieser Ausdrücke positiv sind. Außerdem nimmt die Grenzproduktivität eines Faktors mit zunehmendem Einsatz dieses Faktors laufend ab und nähert sich asymptotisch dem Wert Null, wie aus den zweiten partiellen Ableitungen

$$f_{KK} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1) \cdot \frac{Y}{K^2} < 0$$

und

$$f_{NN} = \frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = \alpha(\alpha-1) \cdot \frac{Y}{N^2} < 0$$

1) Genaugenommen wurde hier nur bewiesen, daß die Annahme $\sigma = 1$ hinreichend für eine Cobb-Douglas-Funktion ist. Daß die Cobb-Douglas-Funktion aus der Annahme $\sigma = 1$ auch notwendig folgt, kann man durch Überprüfung leicht selbst ermitteln, indem man zeigt, daß die Substitutionselastizität einer Cobb-Douglas-Funktion immer den Wert 1 annimmt.

Zu den Begriffen der notwendigen und hinreichenden Bedingungen vgl. R. G. D. Allen, Macro-Economic Theory, a.a.O. S. 6 ff

und aus den Grenzwerten

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\alpha \cdot A \cdot \left(\frac{N}{K} \right)^{1-\alpha} \right] = 0$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial Y}{\partial N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[(1-\alpha) \cdot A \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha} \right] = 0$$

unschwer zu ersehen ist, sofern $0 < \alpha < 1$ und $A > 0$ ist.

Die Berechtigung der Annahme $0 < \alpha < 1$ folgt aus der ökonomischen Bedeutung von α , die zutage tritt, wenn man in der Ableitung f_K die Terme $A \cdot K^{\alpha} \cdot N^{1-\alpha}$ durch Y ersetzt und nach α auflöst. Man erhält dann

$$\alpha = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}$$

Die Analyse dieses Ausdrucks zeigt, daß α nichts anderes als die partielle Produktionselastizität des Kapitals ist bzw. unter der Voraussetzung, daß die Faktoren nach ihren Grenzproduktivitäten entlohnt werden, den Einkommensanteil des Faktors Kapital am Volkseinkommen, die Profitquote, darstellt. Analog läßt sich zeigen, daß

$$(1-\alpha) = \frac{\partial Y}{\partial N} \cdot \frac{N}{Y}$$

ist, d. h. gleich der partiellen Produktionselastizität des Faktors Arbeit bzw. gleich der Lohnquote ist. Da beide Quoten aber nur positiv sein können, muß der Wert von α zwischen Null und Eins liegen.

Ähnlich läßt sich die Annahme $A > 0$ begründen. Da die Produktionsfunktion $Y = f(K, N)$ nur für positive Werte von K , N und Y einen ökonomischen Sinn ergibt und $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot N^{1-\alpha}$ ist, kann auch A nur positiv sein.

Ökonomisch gesehen ist A ein Effizienzparameter, da der Output, der aus einem Faktoreinsatz resultiert, um so höher ist, je größer der Faktor A ist. Veränderungen von A ergeben sich auf Grund von Effizienzänderungen, die nicht auf eine Änderung der Faktoreinsatzmengen zurückgeführt werden können, und sind damit Ausdruck eines technischen Fortschritts. Der

technische Fortschritt, der durch die Veränderungsrate von A gemessen wird, ist autonom und nicht faktorgebunden. Außerdem ist er Hicks-neutral¹⁾, denn wie man leicht nachprüfen kann erhöht eine Veränderung von A die Grenzproduktivitäten von Arbeit und Kapital im gleichen Verhältnis und läßt daher bei konstanter Kapitalintensität die Grenzrate der Substitution unverändert. Gleichzeitig ist der technische Fortschritt Harrod-neutral²⁾, denn bei einem im Zeitablauf konstanten Kapitalkoeffizienten bleibt auch der Zinssatz im Zeitablauf konstant.

Dies läßt sich folgendermaßen zeigen: Differenziert man die Gleichung

$$r(t) = \alpha \cdot A(t) \cdot \left[\frac{N(t)}{K(t)} \right]^{1-\alpha} = \alpha \cdot \left[\frac{Y(t)}{K(t)} \right]$$

nach der Zeit und bezeichnet die Wachstumsraten von Einkommen und Kapitalstock mit y und k und die Veränderungsrate des Zinses mit $\dot{r}/r$, so ist

$$\frac{\dot{r}}{r} = y - k$$

Aus dieser Beziehung ist unmittelbar zu erkennen, daß bei einem im Zeitablauf konstanten Kapitalkoeffizienten ($k - y = 0$) die Veränderungsrate des Zinses Null ist und damit der Zinssatz konstant bleibt.

Analog ließe sich auch zeigen, daß der technische Fortschritt in einer Cobb-Douglas-Funktion schließlich auch als neutral im Sinne Solows interpretiert werden kann.³⁾

- 1) Zur Definition des Hicks-neutralen technischen Fortschritts vgl. J. R. Hicks, *The Theory ...*, a.a.O. S. 121 f
- 2) Zur Definition des Harrod-neutralen technischen Fortschritts vgl. R. F. Harrod, *Review of Joan Robinsons Essay in the Theory of Employment*, in: *The Economic Journal*, Vol. 47 (1937), S. 326 - 330, insbes. S. 329, und R. F. Harrod, *Dynamische Wirtschaft*, Wien, Stuttgart 1949, S. 39
- 3) Zum Begriff des Solow-neutralen technischen Fortschritts vgl. R. M. Solow, *Capital Theory and the Rate of Return*, Amsterdam 1963, S. 59 f, und

Die Tatsache, daß im Falle der Cobb-Douglas-Funktion der technische Fortschritt gleichzeitig neutral im Sinne von Hicks, Harrod und Solow ist, ist darauf zurückzuführen, daß die Cobb-Douglas-Funktion eine Substitutionselastizität von Eins besitzt. Die Neutralitätsdefinitionen von Hicks, Harrod und Solow sind nämlich nur bei einer Substitutionselastizität von Eins äquivalent.¹⁾

Ebenfalls auf die Annahme einer Substitutionselastizität von Eins ist es zurückzuführen, daß die Einkommensverteilung sowohl vom technischen Fortschritt als auch von der Höhe der Kapitalintensität unabhängig und konstant ist, wie leicht aus der Beziehung

$$\frac{r \cdot K}{w \cdot N} = \frac{r \cdot K/Y}{w \cdot N/Y} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

zu erkennen ist. Die Begründung dieser Aussagen wird uns mit Hilfe einer Produktionsfunktion gelingen, in der die Substitutionselastizität auch von Eins verschieden sein kann. Der einfachste Fall dieser Kategorie von Produktionsfunktionen ist die Klasse der CES-Funktionen, die im folgenden abgeleitet werden soll.

Anm. 3, Forts.

R. Sato und M. J. Beckmann, Neutral Inventions and Production Functions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 35 (1968), S. 59

- 1) Die Äquivalenz von Hicks-neutralem und Harrod-neutralem technischem Fortschritt bei einer Substitutionselastizität von Eins wurde zuerst von J. Robinson nachgewiesen. Vgl. J. Robinson, The Classification of Inventions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 5 (1937/38), S. 139 - 142. Ein sehr anschaulicher graphischer Beweis findet sich auch bei M. Neumann. Vgl. M. Neumann, Kapitalbildung, Wettbewerb und Ökonomisches Wachstum, a.a.O. S. 23 f. In allgemeiner Form wurden die Beziehungen zwischen beiden Neutralitätsdefinitionen von Uzawa beschrieben. Vgl. H. Uzawa, Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, in: The Review of Economic Studies, Vol. 28 (1960/61), S. 117 - 124

5. Die Klasse der CES-Produktionsfunktionen ($\sigma = \text{const}$)

Die Klasse der CES-Produktionsfunktionen umfaßt die Gruppe der homogenen Produktionsfunktionen, in denen die Substitutionselastizität sowohl im gesamten Wertebereich von K und N als auch im Zeitablauf konstant ist. Faßt man $\sigma \geq 0$ in diesem Sinne als eine gegebene konstante Größe auf, so läßt sich die CES-Produktionsfunktion am leichtesten aus folgender Beziehung ableiten:¹⁾

$$\sigma = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{w}{y} \quad (11)$$

Daß dieser Ausdruck mit der Beziehung (7) übereinstimmt, wird erkennbar, wenn man berücksichtigt, daß auf Grund von Gleichung (5)

$$w = g(x) - x \cdot g'(x)$$

ist. Denn leitet man diesen Ausdruck nach x ab, so erhält man

$$\frac{dw}{dx} = g'(x) - x \cdot g''(x) - g'(x) = -x \cdot g''(x)$$

Berücksichtigt man nun, daß $\frac{dy}{dx} = g'(x)$ ist, so ist auf Grund der Kettenregel

$$\frac{dy}{dw} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dw} = - \frac{g'(x)}{x \cdot g''(x)}$$

und

$$\frac{dy}{dw} \cdot \frac{w}{y} = - \frac{g'(x)[g(x) - x \cdot g'(x)]}{x \cdot g(x) \cdot g''(x)} = \sigma$$

Schreibt man die Ausgangsgleichung (11) in der logarithmischen Schreibweise

$$\sigma = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{w}{y} = \frac{d}{d} \frac{\log y}{\log w}$$

so erhält man durch Integration

$$\log y = \sigma \cdot \log w + C$$

bzw. wenn man für $C = \sigma \cdot \log A$ schreibt

$$\log y = \sigma \cdot \log (A \cdot w)$$

Daraus erhält man nach Entlogarithmierung

1) Die folgende Herleitung der CES-Funktion folgt Allen. Vgl. R. G. D. Allen, Macro-Economic Theory, a.a.O. S. 52 f

$$y = (A \cdot w)^{\sigma}$$

oder nach w aufgelöst

$$w = \frac{y^{1/\sigma}}{A} = g(x) - x \cdot g'(x)$$

Diese Beziehung stellt eine Differentialgleichung in $y = g(x)$ dar, die durch Umformung in die Form

$$x \cdot g'(x) = g(x) \left[1 - \frac{(g(x))^{\frac{1}{\sigma}-1}}{A} \right]$$

gebracht werden kann. Schreibt man nun für $\frac{1}{A} = b$ und für $\frac{1}{\sigma}-1 = \varphi$, so hat man

$$x \cdot g'(x) = g(x) \left[1 - b \cdot (g(x))^{\varphi} \right]$$

woraus sich durch Einsetzen von $g'(x) = \frac{dy}{dx}$ und $g(x) = y$ ergibt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y \cdot (1 - b \cdot y^{\varphi})}$$

Da der rechte Ausdruck dieser Gleichung in dieser Form nicht direkt integrierbar ist, bringt man ihn durch Partialbruchzerlegung (bzw. durch gleichzeitige Addition und Subtraktion von $1/y$) in die Form

$$\frac{dy}{y \cdot (1 - b \cdot y^{\varphi})} = \frac{dy}{y} - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\varphi \cdot b \cdot y^{\varphi-1} \cdot dy}{(1 - b \cdot y^{\varphi})}$$

In dieser Form ist der Ausdruck leicht integrierbar. Man erhält nach Integration der gesamten Differentialgleichung

$$\log x = \log y - \frac{1}{\varphi} \cdot \log (1 - b \cdot y^{\varphi}) + C$$

mit der Integrationskonstanten C . Multipliziert man die ganze Gleichung mit φ und setzt $\varphi \cdot C = \log a$, so ist

$$\varphi \cdot \log x = \varphi \cdot \log y - \log (1 - b \cdot y^{\varphi}) + \log a$$

bzw.

$$\log x^{\varphi} = \log \left(\frac{a \cdot y^{\varphi}}{1 - b \cdot y^{\varphi}} \right) = \log \left(\frac{a}{y^{-\varphi} - b} \right)$$

oder entlogarithmiert

$$x^{\varphi} = \frac{a}{y^{-\varphi} - b}$$

Löst man diesen Ausdruck nach y auf und setzt die ursprünglichen Bezeichnungen für x und y ein, so erhält man die

Pro-Kopf-Produktionsfunktion

$$\frac{Y}{N} = \left[a \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{-\xi} + b \right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (12)$$

und nach Multiplikation mit N

$$Y = \left[a \cdot K^{-\xi} + b \cdot N^{-\xi} \right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (13)$$

die Klasse der Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität (constant elasticity of substitution production functions), wobei ξ der Substitutionsparameter ist und zwischen ξ und σ die Beziehung besteht $\xi = \frac{1}{\sigma} - 1$.

Damit haben wir gezeigt, daß die Substitutionselastizität σ einer linear-homogenen Produktionsfunktion dann und nur dann konstant und ungleich Eins ist, wenn die Produktionsfunktion die Form

$$Y = \left[a \cdot K^{-\xi} + b \cdot N^{-\xi} \right]^{-1/\xi}$$

mit $\xi = \frac{1}{\sigma} - 1$ besitzt.

Im Gegensatz zur Cobb-Douglas-Funktion ist es jedoch nicht ohne weiteres möglich, die beiden Konstanten a und b ökonomisch zu interpretieren. Eine ökonomische Interpretation ist vielmehr erst nach weiteren Umformungen möglich.

Ersetzt man die ökonomisch schwer interpretierbaren Parameter a und b durch $a+b = \gamma^{-\xi}$ und $a \cdot \gamma^{\xi} = \delta$, so erhalten wir an Stelle von Gleichung (13) die CES-Funktion in der Schreibweise von Arrow, Chenery, Minhas und Solow, nämlich¹⁾

$$Y = \left[\delta \cdot K^{-\xi} + (1-\delta) \cdot N^{-\xi} \right]^{-1/\xi} \quad (14)$$

In dieser Schreibweise besitzt die CES-Funktion drei Parameter, die als Substitutionsparameter (ξ), als Effizienzparameter (γ) und als Verteilungsparameter (δ) bezeichnet werden. Der Substitutionsparameter ξ ist ein Ausdruck für den Grad der Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren. Der Zusammenhang zwischen ξ und σ wurde oben schon dargestellt. Der Effizienzparameter γ ($\gamma > 0$) gibt die "totale"

1) Vgl. K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas und R. M. Solow (im folgenden abgekürzt als ACMS), Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 43 (1961), S. 225 - 250, hier S. 230

Faktorproduktivität an und ist damit ein Maß für das technische Niveau des durch die Produktionsfunktion beschriebenen Produktionsprozesses. Veränderungen von γ in der Zeit stellen einen technischen Fortschritt dar. Der durch die Veränderungsrate $\dot{\gamma}/\gamma$ gemessene technische Fortschritt ist Hicks-neutral, da er bei konstanter Kapitalintensität das Verhältnis der Grenzproduktivitäten (die Grenzrate der Substitution) unverändert läßt, wie leicht gezeigt werden kann, wenn man aus den ersten Ableitungen

$$f_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \sigma \gamma^{-\sigma} \left[\frac{Y}{K} \right]^{1+\sigma} > 0$$

und

$$f_N = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\sigma) \gamma^{-\sigma} \left[\frac{Y}{N} \right]^{1+\sigma} > 0$$

die Grenzrate der Substitution bildet. Man erhält nämlich:

$$-\frac{dK}{dN} = \frac{f_N}{f_K} = \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \left[\frac{K}{N} \right]^{1+\sigma} \quad (15)$$

Da σ im Zeitablauf als konstant angenommen wird und der Ausdruck von $\gamma(t)$ unabhängig ist, bleibt die Grenzrate der Substitution bei konstanter Kapitalintensität konstant.

Dagegen ist der technische Fortschritt nicht Harrod-neutral, wie aus der Beziehung

$$\frac{\dot{r}}{r} = (1+\sigma) \cdot (y-k) - \sigma \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right)$$

zu ersehen ist. Denn bei einer Konstanz des Kapitalkoeffizienten ($y-k = 0$) ist $\dot{r}/r \neq 0$. $\dot{r}/r$ ist bei $y-k = 0$ nur dann Null, wenn $\sigma = 0$ bzw. $\sigma = 1$ ist. Die ökonomische Bedeutung des Verteilungsparameters σ ($0 < \sigma < 1$) ergibt sich aus der Verteilungsgleichung

$$\frac{r \cdot K}{w \cdot N} = \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \left[\frac{K}{N} \right]^{-\sigma}$$

Aus dieser Beziehung ist ersichtlich, daß die Höhe von σ für die funktionale Einkommensverteilung von zentraler Bedeutung ist. Der Distributionsparameter σ ist jedoch nicht mit der partiellen Produktionselastizität α der Cobb-Douglas-Funktion identisch, wie aus den Beziehungen

$$\frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \sigma \cdot \left(\frac{Y}{\gamma \cdot K} \right)^{\sigma}$$

und

$$\frac{\partial Y}{\partial N} \cdot \frac{N}{Y} = (1-\sigma) \cdot \left(\frac{Y}{Y \cdot N} \right)^{\varphi}$$

unschwer zu ersehen ist. Nur für den Sonderfall $\varphi = 0$ bzw. $\sigma = 1$ sind α und σ äquivalent.

Die Isoquanten der CES-Funktion verlaufen wie die der Cobb-Douglas-Funktion konvex zum Ursprung. Das folgt aus den Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitungen. Wie aus den Ausdrücken

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = Y^{-\varphi} \sigma (1+\varphi) \cdot \left(\frac{Y}{K} \right)^{\varphi} \cdot \left(\frac{f_K \cdot K - Y}{K^2} \right)$$

und

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial N^2} = Y^{-\varphi} (1-\sigma) \cdot (1+\varphi) \cdot \left(\frac{Y}{N} \right)^{\varphi} \cdot \left(\frac{f_N \cdot N - Y}{N^2} \right)$$

entnommen werden kann, sind die zweiten Ableitungen wegen der Beziehung $Y = f_K \cdot K + f_N \cdot N$ negativ.

Außerdem nähern sich die Isoquanten der CES-Funktion stets asymptotisch an bestimmte Geraden an.¹⁾ Der Verlauf dieser Asymptoten wird bei gegebenem Output Y_0 und gegebenem technischem Wissen γ durch den Distributions- und Substitutionsparameter determiniert.

Ist der Substitutionsparameter $\varphi > 0$ bzw. $\sigma < 1$, so verlaufen die Asymptoten der CES-Funktion parallel zu den Koordinatenachsen im Abstand

$$K_{\min} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{c^{-\varphi}}{\sigma} - \left(\frac{1-\sigma}{\sigma} \right) \cdot N^{-\varphi} \right]^{-1/\varphi} = c \cdot \sigma^{1/\varphi}$$

und

$$N_{\min} = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{c^{-\varphi}}{1-\sigma} - \left(\frac{\sigma}{1-\sigma} \right) \cdot K^{-\varphi} \right]^{-1/\varphi} = c \cdot (1-\sigma)^{1/\varphi}$$

wobei $c = Y_0/\gamma$ ist. Das bedeutet, daß ein Produkt in Höhe von Y_0 nur erzeugt werden kann, wenn diese Mindestmengen beider Faktoren überschritten werden. Geht $\varphi \rightarrow \infty$ bzw. wird die Substitutionselastizität Null, so wird $K_{\min} = c$ und $N_{\min} = c$ und wir haben den Fall der Leontief-Funktion vorliegen. Geht $\varphi \rightarrow 0$ bzw. geht $\sigma \rightarrow 1$, so streben $K_{\min}$ und $N_{\min}$

1) Vgl. E. Helmstädter, Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 126 (1964), S. 177 - 195

gegen Null und wir erhalten im Grenzfall als Asymptoten wie bei der Cobb-Douglas-Funktion die Koordinatenachsen.

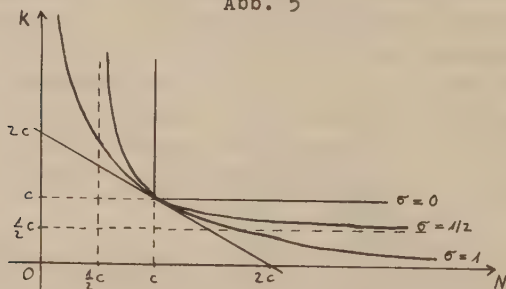
Ist die Substitutionselastizität dagegen größer als Eins ($-1 < \sigma < 0$), so schneidet die Isoquante die Koordinatenachsen in den Punkten

$$\begin{aligned} & K = 0 \mid N = c \cdot (1 - \sigma)^{1/\sigma} \\ \text{und} \quad & N = 0 \mid K = c \cdot \sigma^{1/\sigma} \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß bei einer Substitutionselastizität von größer als Eins das Produkt Y_0 auch nur mit einem Faktor erzeugt werden könnte. Dieser Fall ist jedoch ökonomisch sinnlos, weshalb der Fall $\sigma > 1$ als ökonomisch irrelevant ausgeschlossen werden muß. Es wäre allenfalls denkbar, daß die Substitutionselastizität in einem bestimmten Bereich Werte von größer als Eins annehmen könnte, was aber der Annahme einer konstanten Substitutionselastizität widersprechen würde.

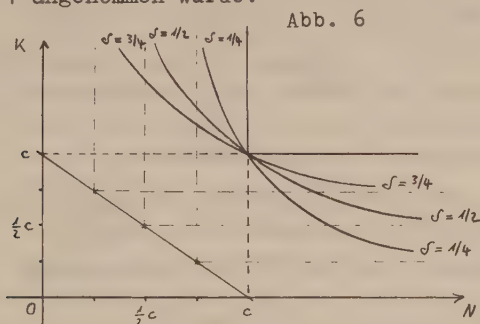
Diese Ausführungen zeigen deutlich, daß die Substitutionselastizität die Krümmung der Isoquanten bestimmt. In der folgenden Abbildung sind die Isoquanten für verschiedene Werte von σ graphisch dargestellt, wobei für $\sigma = 1/2$ angenommen wurde.

Abb. 5



Demgegenüber bestimmt der Distributionsparameter σ die Schiefe einer Isoquante. Dies erkennt man sofort, wenn man in der oben abgeleiteten Beziehung für die Grenzrate der Substitution (Gleichung (15)) die Kapitalintensität und den Substitutionsparameter konstant hält. Dann ist die Schiefe einer Isoquante um so größer, je mehr sich σ von dem Wert $1/2$ entfernt und sich einem der Randwerte

Null oder Eins annähert. Dies wird durch die folgende Abbildung veranschaulicht, in der drei Isoquanten für $\sigma = 1/4$, $\sigma = 1/2$ und $\sigma = 3/4$ dargestellt sind, wobei für $\xi = 1$ angenommen wurde.



Aus diesen Ausführungen folgt, daß die Verteilungsrelation bei Annahme einer konstanten Substitutionselastizität von der Schiefe einer Isoquante determiniert wird. Veränderungen des Fortschrittsparameters γ schließlich bewirken eine Verschiebung der Isoquante. Diese Verschiebung erfolgt radial zum Ursprung, entweder zu diesem hin, wenn sich γ vergrößert, oder von diesem weg, wenn sich γ verkleinert (was allerdings ökonomisch weit weniger wahrscheinlich sein dürfte, da dies einen technischen Rückschritt bedeuten würde). Ein technischer Fortschritt äußert sich demnach in einer Verschiebung der Isoquanten zum Ursprung hin.

In den bisherigen Ausführungen ist schon verschiedentlich erwähnt worden, daß die Eigenschaften der CES-Funktion von ACMS für $\xi = 0$ mit denen der Cobb-Douglas-Funktion übereinstimmen. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß die CES-Funktion von ACMS, die selbst nur für $\xi \neq 0$ definiert ist, in die Cobb-Douglas-Funktion überführt werden kann, wenn ξ gegen Null konvergiert.¹⁾

Logarithmieren wir Gleichung (14) und bilden den Grenzwert für $\xi \rightarrow 0$

1) Die folgende Beweisführung stammt von Krelle.

Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 150 f

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \log Y = \log \gamma + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-\log [\varphi \cdot K^{-\varphi} + (1-\varphi) \cdot N^{-\varphi}]}{\varphi}$$

so erhalten wir einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Zur Lösung dieses Ausdrucks wenden wir die L'Hôspitalsche Regel¹⁾ an und schreiben

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \log Y = \log \gamma + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-\frac{d}{d\varphi} \log [\varphi \cdot K^{-\varphi} + (1-\varphi) \cdot N^{-\varphi}]}{\frac{d}{d\varphi} [\varphi]}$$

Nach Durchführung der Ableitungen erhält man

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \log Y = \log \gamma + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi \cdot K^{-\varphi} \cdot \log K + (1-\varphi) \cdot N^{-\varphi} \cdot \log N}{\varphi \cdot K^{-\varphi} + (1-\varphi) \cdot N^{-\varphi}}$$

Geht nun $\varphi \rightarrow 0$, so geht $K^{-\varphi} \rightarrow 1$ und $N^{-\varphi} \rightarrow 1$ und man erhält

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \log Y = \log \gamma + \varphi \cdot \log K + (1-\varphi) \cdot \log N$$

oder entlogarithmiert

$$Y = \gamma \cdot K^{\varphi} \cdot N^{1-\varphi}$$

Es zeigt sich also, daß die Cobb-Douglas-Funktion als ein Spezialfall der CES-Funktion betrachtet werden kann.

Ebenso läßt sich zeigen, daß die CES-Funktion von ACMS für $\varphi \rightarrow \infty$ bzw. $\varphi \rightarrow 0$ in eine Leontief-Funktion übergeht.²⁾

Bringt man in Gleichung (14) einen Faktor, z. B. den Faktor K, vor die Klammer und formt geringfügig um, so erhält man

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} Y = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{K \cdot K}{\left[\varphi + (1-\varphi) \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{\varphi} \right]^{1/\varphi}} = \gamma \cdot K$$

wenn $K < N$ ist. Ist dagegen $K > N$, so erhält man durch Ausklammerung von N

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} Y = \gamma \cdot N$$

Da bei $K = N$ beide Gleichungen Gültigkeit besitzen und sonst immer eine der beiden Gleichungen gilt, erhält man die Leontief-Funktion

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} Y = \gamma \cdot \min[K, N]$$

1) Vgl. M. J. Beckmann und H. P. Künzi, Mathematik für Ökonomen I, Berlin, Heidelberg, New York 1969, S. 212 ff

2) Vgl. C. E. Ferguson, The Neoclassical Theory ..., a.a.O. S. 107

Mit diesen Ausführungen konnte gezeigt werden, daß die CES-Funktion von ACMS alle neoklassischen Produktionsvorstellungen in sich vereint und daß sie außerdem die Cobb-Douglas-Funktion und die Leontief-Funktion als Spezialfälle enthält, weshalb sie als umfassendes und theoretisch geschlossenes Produktionsmodell angesehen werden kann. Die einzige theoretische Einschränkung dieses Konzepts der Produktionsfunktion stellt außer der Annahme einer konstanten Substitutionselastizität die Annahme eines Hicks-neutralen technischen Fortschritts dar. /

Die Annahme eines Hicks-neutralen technischen Fortschritts kann jedoch ohne große Schwierigkeit durch alle möglichen anderen Annahmen über die Art des technischen Fortschritts ersetzt werden, ohne daß sich dadurch am Konzept der CES-Funktion selbst etwas Wesentliches ändert.¹⁾ Die wohl größte Bedeutung unter den verschiedenen Alternativmöglichkeiten, den technischen Fortschritt in die Produktionsfunktion einzuführen, hat das Konzept von David und van de Klundert erlangt,²⁾ die unter technischem Fortschritt eine Erhöhung der Effizienz der Produktionsfaktoren verstehen, die sich auf den Output wie eine quantitative Erhöhung der physischen Einsatzmengen der Faktoren auswirkt und deshalb als faktor-erhöhender technischer Fortschritt bezeichnet wird. Je nachdem ob ein technischer Fortschritt die Effizienz des Faktors Arbeit oder die des Kapitals erhöht, wird er als labor-augmenting oder arbeitserhöhender oder als capital-augmenting oder kapitalerhöhender technischer Fortschritt bezeichnet.³⁾

1) Vgl. dazu R. Sato und M. J. Beckmann, Neutral Inventions .. a.a.O. S. 57 ff, und W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 123 ff

2) Vgl. P. A. David und Th. van de Klundert, Biased Efficiency Growth and Capital-Labor Substitution in the US 1899 - 1960, in: The American Economic Review, Vol. 55 (1965), S. 357 - 394

3) Ebenda S. 358 f.

Mit den Ausdrücken "arbeitserhöhend" und "kapitalerhöhend" folgen wir der Bezeichnungsweise von M. Neumann. Vgl. M. Neumann, Kapitalbildung ..., a.a.O. S. 22. Verschiedentlich wird auch von "faktorvermehrendem" oder "faktorvervielfältigendem" technischem Fortschritt gesprochen, was aber nach Meinung des Verfassers den Sachverhalt weniger gut trifft.

Führt man dieses Fortschrittskonzept in die CES-Funktion ein, in der die Substitutionselastizität zwischen den "inputs" und im Zeitablauf konstant ist, so nimmt die CES-Funktion die Form¹⁾

$$Y = [(AK)^{-\sigma} + (BN)^{-\sigma}]^{-1/\sigma}$$

an, in der A und B die Effizienzindizes der Faktoren Kapital und Arbeit darstellen. Wie im folgenden Kapitel ausführlich gezeigt werden soll, umfaßt diese Form der CES-Funktion sowohl den Fall des Hicks- als auch des Harrod-neutralen Fortschritts als Spezialfälle, je nachdem welche Werte die Veränderungsraten von A und B in der Zeit annehmen. Da diese Produktionsfunktion später noch in den Mittelpunkt unserer Erörterungen rücken wird, soll an dieser Stelle auf eine genauere Beschreibung ihrer Eigenschaften verzichtet werden.

Somit verbleibt schließlich in der Klasse der linear-homogenen Produktionsfunktionen vom CES-Typ die Annahme einer konstanten Substitutionselastizität als einzige theoretische Restriktion. Hält man sich jedoch die Differentialgleichung (7) vor Augen, in der die Substitutionselastizität als eine Funktion der Kapitalintensität erscheint, so erscheint die Konstanz der Substitutionselastizität, d. h. deren Unabhängigkeit von der Kapitalintensität, allerdings als eine recht willkürliche Annahme, denn es ist a priori durchaus nicht einzusehen, warum die Substitutionselastizität in jedem Punkt der Isoquante gleich sein sollte. Deshalb hat es in jüngerer Zeit auch nicht an Versuchen gefehlt, diese restriktive Annahme aufzugeben. Das Ergebnis dieser Versuche stellt eine Klasse von Produktionsfunktionen mit variabler Substitutionselastizität dar, die in der Literatur als die Klasse der VES-Produktionsfunktionen bezeichnet wird.

1) Vgl. P. A. David und Th. van de Klundert, Biased Efficiency ... a.a.O. S. 361

6. Die VES-Produktionsfunktionen

(σ = var.)

Die Herleitung von VES-Produktionsfunktionen erfolgt im Prinzip genauso wie die Herleitung der bisher vorgestellten Produktionsfunktionen. Verzichtet man in einer der zur Integration geeigneten Differentialgleichungen für σ auf eine Fixierung der Substitutionselastizität, so läßt sich eine (Pro-Kopf-)Produktionsfunktion herleiten, in der σ in Abhängigkeit der Kapitalintensität erscheint und damit variabel ist.¹⁾ Geht man z. B. direkt von der Allenschen Definitionsgleichung für die Substitutionselastizität

$$\sigma(x) = \frac{dx/x}{ds(x)/s(x)}$$

aus²⁾, so erhält man durch Auflösung dieser Differen-

- 1) Eine andere Möglichkeit zur Einführung einer variablen Substitutionselastizität in der Produktionsfunktion bietet das Konzept der "homothetischen" Produktionsfunktion von S. Clemhout (vgl. S. Clemhout, The Class of Homothetic Isoquant Production Functions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 35 (1968), S. 91 - 104). Die "homothetischen" Produktionsfunktionen besitzen die Struktur $Y = F[f(K, N)] = F(z)$, wobei F monoton steigend in $f(K, N) = z$ und $f(\cdot)$ linear-homogen in K und N ist (vgl. S. Clemhout, a.a.O. S. 91, und R. W. Shephard, Theory of Cost and Production Functions, Princeton, New Jersey 1970, S. 30). Die "homothetischen" Produktionsfunktionen besitzen damit zwar einen linear-homogenen Teil, sind in der Regel aber selbst nicht mehr homogen. Sie sind daher allgemeiner als alle bisher vorgestellten Konzeptionen einschließlich der VES-Produktionsfunktionen, wobei diese aber als Sonderfälle dieses Konzepts interpretiert werden können. Die Aufgabe der Homogenität ermöglicht zwar die Einführung eines Skalenparameters, der bei verschiedenen Produktionshöhen verschiedene Werte annehmen kann, doch verlassen wir damit die aus verteilungstheoretischen Gründen wichtige neoklassische Annahme der linearen Homogenität, weshalb wir auf diesen Produktionsfunktionstypus im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingehen werden.
- 2) Dieses Verfahren geht auf Sato und Hoffman zurück. Vgl. R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 50 (1968), S. 453 - 460, hier S. 454

tialgleichung nach ds/s und Integration

$$\int \frac{ds}{s} = \int \frac{dx}{x \cdot \sigma(x)} + C_1$$

oder wenn man für die Integrationskonstante

$C_1 = \log A$ setzt

$$s = A \exp \int \frac{dx}{x \cdot \sigma(x)}$$

Berücksichtigt man nun, daß $\int \frac{dx}{x} = \log x$ und daher

$\frac{d}{dx} \left[\int \frac{dx}{x} \right] = \frac{d \log x}{dx}$ ist, so erhält man

$$s = A \exp \int \frac{d \log x}{\sigma(x)}$$

Es ist nun aber $s = \frac{f_N}{f_K} = \frac{y}{y'} - x$, wobei $y = g(x)$ ist.

Daher ist

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x + A \exp \int \frac{d \log x}{\sigma(x)}}$$

oder integriert

$$\log y = \int \frac{dx}{x + A \exp \int \frac{d \log x}{\sigma(x)}} + C_2$$

Setzt man für die Integrationskonstante $C_2 = \log B$ und entlogarithmiert, so erhält man die Pro-Kopf-Produktionsfunktion mit variabler Substitutionselastizität

$$y = B \exp \int \frac{dx}{x + A \exp \int \frac{d \log x}{\sigma(x)}}$$

mit den Konstanten $v \in \{A, B\} > 0$. Allerdings besitzt die VES-Funktion in dieser Form einen nichtoperativen Allgemeinheitsgrad. Denn es ist weder mit Hilfe dieser Funktion möglich, die noch völlig unbestimmte Beziehung $\sigma = \sigma(x)$ zu spezifizieren, noch kann die Produktionsfunktion selbst einer ökonometrischen Schätzung unterworfen werden. Eine explizite, empirisch testbare Funktion läßt sich erst dann herleiten, wenn man über die Abhängigkeit der variablen Substitutionselastizität bestimmte Hypothesen einführt.

So haben z. B. Sato und Hoffman für verschiedene Hypothesen über die Substitutionselastizität verschiedene

explizite Produktionsfunktionen mit variabler Substitutionselastizität hergeleitet und sie empirischen Tests unterworfen.¹⁾ Einen anderen Weg wählten Lu und Fletcher, die ihre Version der VES-Funktion aus einer empirisch getesteten Regressionsgleichung herleiteten.²⁾

Alle diese Funktionen besitzen eine variable Substitutionselastizität, deren Variabilität jedoch von vornherein durch bestimmte Hypothesen festgelegt ist. Es besteht also mit diesen VES-Funktionen nicht die Möglichkeit zu ermitteln, wie die Substitutionselastizität von anderen Größen wie z. B. der Kapitalintensität oder der Zeit abhängig ist, sondern allenfalls die Möglichkeit zu prüfen, ob und vor allem in welchem Ausmaß bestimmte Hypothesen über die Substitutionselastizität empirisch bestätigt werden oder sich als nicht signifikant erweisen. Damit stellt die Konzeption von Produktionsfunktionen mit variabler Substitutionselastizität nach Auffassung des Verfassers im Prinzip keinen wesentlichen Fortschritt gegenüber den CES-Produktionsfunktionen dar, denn eine explizite Form der Produktionsfunktion kann genauso wie bei jenen nur durch die Annahme einer bestimmten Hypothese über die Substitutionselastizität ermittelt werden. Der Verlauf der Isoquanten wird in jedem Fall, wie wir oben schon gesehen haben, bei gegebenem technischem Wissen ausschließlich von der Höhe der Substitutionselastizität bestimmt, wobei es in diesem Zusammenhang nur von sekundärer Bedeutung ist, von welchen Größen der Wert von σ beeinflusst wird. Aus diesem Grund soll hier auf eine eingehendere Erläuterung der produktionstheoretischen Eigenschaften der verschiedenen expliziten VES-Funktionen verzichtet werden. Auf die empirischen Ergebnisse, die sich auf Grund von Schätzungen mit einer variablen Substitutionselastizität ergeben haben, werden wir in einem späteren Kapitel noch zurückkommen.

1) Vgl. R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions ..., a.a.O. S. 454 ff

2) Vgl. Yao-chi Lu und L. B. Fletcher, A Generalization of the CES-Production Functions, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 50 (1968), S. 449 - 452

7. Zusammenfassung

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß die Substitutionselastizität für die Gestalt der Produktionsfunktion von zentraler Bedeutung ist. Denn wie die vorigen Abschnitte gezeigt haben, ist für die Konzipierung expliziter Produktionsfunktionen mit den üblicherweise angenommenen neoklassischen Eigenschaften eine genaue Kenntnis über die Substitutionselastizität und deren Determinanten notwendig und hinreichend. Die Gestalt der Produktionsfunktion und ihrer Isoquanten hängt bei gegebenem technischem Wissen ausschließlich von der Höhe der Substitutionselastizität ab. Damit sind aber auch die produktionstheoretischen Eigenschaften der Produktionsfunktion in entscheidendem Maße von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig. Je nachdem welche Werte man für die Substitutionselastizität unterstellt, lassen sich ganz spezifische Produktionsfunktionen mit jeweils charakteristischen Eigenschaften ermitteln. Zur Ermittlung einer expliziten Produktionsfunktion ist jedoch immer eine Annahme über den Wert der Substitutionselastizität und dessen Abhängigkeit von anderen Größen erforderlich. Das bedeutet, daß ein Urteil über die "richtige" Produktionsfunktion unter den verschiedenen Konzepten ohne genaue Kenntnis der Substitutionseigenschaften zwischen Arbeit und Kapital aus theoretischer Sicht nicht möglich erscheint. Hierüber kann letztlich nur eine empirische Untersuchung Aufschluß geben. Allerdings lassen sich auch auf deduktivem Wege bestimmte Hypothesen über die Substitutionselastizität bezüglich ihrer ökonomischen Relevanz beurteilen, wenn man die verschiedenen Produktionsfunktionen in umfangreichere ökonomische Modelle aufnimmt und deren Ergebnisse auf ihre ökonomische Konsistenz und Plausibilität hin überprüft. Wenn wir im folgenden Kapitel die Bedeutung der Substitutionselastizität für die makroökonomische Einkommensverteilung herausarbeiten, so soll auch dieser Aspekt entsprechend mitberücksichtigt werden.

III. Kapitel

Substitutionselastizität und Einkommens- verteilung

1. Der Zusammenhang zwischen Substitutions- elastizität und Einkommensverteilung

Es ist eigentlich etwas erstaunlich, daß der Produktionsparameter Substitutionselastizität ursprünglich nicht im Zusammenhang mit produktionstheoretischen Fragen in der ökonomischen Literatur aufgetaucht ist, sondern vielmehr primär unter verteilungstheoretischen Aspekten definiert und in die ökonomische Theorie aufgenommen wurde. So erscheint der Begriff der Substitutionselastizität erstmalig bei Hicks im Zusammenhang mit der Untersuchung der Beziehungen zwischen Faktoreinsatzänderungen und Einkommensverteilung und bei J. Robinson im Zusammenhang mit der Nachfrage nach Arbeitskräften.¹⁾ Auch die anschließende Diskussion um die Definitionen der Substitutionselastizität stand primär unter diesem anwendungsorientierten Gesichtspunkt und nicht unter produktionstheoretischen Aspekten.²⁾ Erst die grundlegende Behandlung der Substitutionselastizität durch Allen³⁾ stellte den produktionstheoretischen Charakter und die produktionstheoretische Bedeutung dieses Elastizitätsbegriffs in den Vordergrund.

1) Vgl. J. R. Hicks, *The Theory of Wages*, a.a.O., und J. Robinson, *The Economics of Imperfect Competition*, a.a.O.

2) Vgl. die Beiträge von P. M. Sweezy, A. P. Lerner, R. F. Kahn, J. R. Hicks, in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 1 (1933/34), S. 67 - 80; L. Tarshis, A. P. Lerner und J. E. Meade in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 1 (1933/34), S. 144 - 153; A. C. Pigou in: *The Economic Journal*, Vol. 44 (1934), S. 232 - 241; F. Machlup in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 2 (1934/35), S. 202 - 213; D. G. Champernowne in: *The Economic Journal*, Vol. 45 (1935), S. 246 - 258; R. F. Kahn in: *The Economic Journal*, Vol. 46 (1936), S. 242 - 245; M. Friedman, J. Robinson, A. P. Lerner und F. Machlup in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 3 (1935/36), S. 147 - 152; J. R. Hicks in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 4 (1936/37), S. 1 - 12

3) Vgl. R. G. D. Allen, *Mathematical Analysis ...*, a.a.O. S. 340 - 343

Diese bemerkenswerte Tatsache wird jedoch sofort verständlich, wenn man sich die Aussagen der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung vergegenwärtigt. Dieser Theorie zufolge erhält jeder Produktionsfaktor bei vollkommener Konkurrenz gerade so viel Entlohnung, wie er zum Wert des mit seiner Hilfe erstellten Produktes beiträgt. Denn ein Unternehmer "geht beim Einsatz eines Produktionsfaktors bis zu dem Punkt, wo das Wertgrenzprodukt gleich seinem Preis ist."¹⁾ Aus diesem Grenzproduktivitätssatz, der eine mikroökonomische Verhaltensregel für die Unternehmer darstellt, um ihr Gewinnmaximum zu realisieren, resultiert nach J. B. Clark die makroökonomische Version der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung, wonach sich die Faktorpreise bei vollständiger Konkurrenz nach ihren Grenzproduktivitäten richten: "General wages tend to be equal the actual product created by the last labor that is added to the social workingforce."²⁾ "The earnings of capital are subject to

- 1) Siehe E. Preiser, Bildung und Verteilung des Volkseinkommens, 3. Aufl., Göttingen 1963, S. 270

Die mikroökonomische Gewinnmaximierungsbedingung lautet also:

$$P'_w = \frac{\partial P}{\partial v_1} \cdot p = p_1$$

P'_w = Wertgrenzprodukt

$\frac{\partial P}{\partial v_i}$ = Grenzproduktivität des Faktors i

Dabei haben die Symbole folgende Bedeutung:

p = Produktpreis

p_i = Faktorpreis des Faktors i

Wenn wir bisher davon sprachen, daß die Faktoren nach ihren Grenzproduktivitäten entlohnt werden, so meinten wir damit

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{(\partial P / \partial v_i) \cdot p}{(\partial P / \partial v_j) \cdot p}$$

und wenn wir davon ausgingen, daß die Faktorpreise gleich den Grenzproduktivitäten der Faktoren sind, so unterstellten wir damit implizit einen Produktpreis von Eins. Diese Annahme ist dann gerechtfertigt, wenn man sich für die realwirtschaftlichen Zusammenhänge in einer Wirtschaft interessiert. In diesem Fall kann man nämlich alle Preise in Produkteinheiten ausdrücken bzw. den Produktpreis als 'numéraire' verwenden.

- 2) Vgl. J. B. Clark, Possibility of a Scientific Law of Wages, in: Publications of the American Economic Association, Vol. 4, Baltimore 1889, S. 49

identically the same law as those of labor; they are fixed by the product of the last increment that is brought into the field."¹⁾ Damit wird aber das Studium der Verteilung eigentlich nichts anderes als ein Studium der spezifischen Produktion,²⁾ die nach der Lehre der Klassiker und Neoklassiker dem Gesetz des abnehmenden Ertragszuwachses unterworfen ist. Das Ausmaß, in dem die Grenzproduktivitäten der Faktoren bei partieller Faktorvariation abnehmen, hängt vom Verlauf der Grenzproduktivitätskurven ab und damit von der Gestalt der Produktionsfunktion, die dem Produktionsprozeß zugrunde liegt. Diese wird aber, wie wir in den vorhergehenden Kapiteln gezeigt haben, im wesentlichen von der Höhe der Substitutionselastizität bestimmt. Deshalb hängt auch die Höhe des Gesamteinkommens, das einem Faktor zufließt, und dessen Veränderung infolge eines veränderten Entlohnungssatzes oder einer Einsatzmengenänderung von der Höhe der Substitutionselastizität ab. Eine allgemeine Aussage über die Veränderungen sowie darüber, ob sich die Verteilung dadurch für den betreffenden Faktor verbessert oder verschlechtert, ist deshalb ohne genaue Kenntnis der Produktionsfunktion und insbesondere der Höhe der Substitutionselastizität nicht möglich.

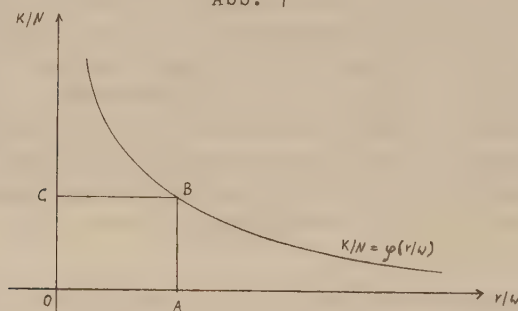
Unmittelbar einleuchtend tritt der Zusammenhang zwischen Einkommensverteilung und Substitutionselastizität in Abbildung 7 zutage, in der die aus dem ersten Kapitel dieser Arbeit schon bekannte "Kapitalintensitätskurve" $K/N = f(r/w)$ dargestellt ist. Während wir dort jedoch die Kapitalintensitätskurve als die mathematische Funktion interpretierten, die den im Prinzip der abnehmenden Grenzrate der Substitution ausgedrückten Zusammenhang zwischen Faktoreinsatzverhältnis und Grenzrate der Substitution darstellt, soll sie jetzt im Lichte der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung als Beziehung interpretiert werden, die angibt, wie sich die Kapitalintensität des Produktionsprozesses als Funktion der Zins-Lohn-Relation verändert.

1) Vgl. J. B. Clark, Possibility ... a.a.O. S. 53

2) Vgl. J. B. Clark, The Distribution of Wealth, New York, London 1899, Neuaufl. 1924, S. 3

Wie im ersten Kapitel dieser Arbeit schon gezeigt worden ist, besitzt die Kapitalintensitätskurve (in obiger Funktionsschreibweise) eine negative Steigung, woraus folgt, daß mit sinkender Zins-Lohn-Relation die Kapitalintensität kontinuierlich zunimmt, was aber nichts anderes bedeutet, als daß die Unternehmer auf eine relative Verteuerung des Produktionsfaktors Arbeit gegenüber dem Kapital mit einer Substitution von Arbeit durch Kapital reagieren. Wie dort ebenfalls gezeigt worden ist, ist die Elastizität der Kapitalintensitätskurve die Substitutionselastizität. Ist die Substitutionselastizität gegeben, so ist deshalb (bei gegebenem technischem Wissen) auch der Verlauf der Kapitalintensitätskurve gegeben.

Abb. 7



In dieser Abbildung wird die Einkommensverteilung bei gegebener Zins-Lohn-Relation durch das Rechteck OABC dargestellt, denn bezeichnet man das Profiteinkommen mit P und das Lohneinkommen mit W , so ist

$$\frac{P}{W} = \frac{r}{w} \cdot \frac{K}{N} \quad (1)$$

Da die Fläche des Rechtecks vom Verlauf der Kapitalintensitätskurve abhängig ist, ist unmittelbar einsichtig, daß die Höhe der Substitutionselastizität die Einkommensverteilung mitbeeinflusst, obwohl nach obiger Beziehung das Verteilungsverhältnis P/W als Funktion der Kapitalintensität und der Zins-Lohn-Relation erscheint.

Der Einfluß von σ tritt offen in Erscheinung, wenn man die

Veränderung der Verteilungsrelation infolge einer Veränderung dieser beiden Determinanten betrachtet.¹⁾ Auskunft über den Einfluß dieser beiden Größen auf die Verteilungsrelation gibt das folgende Differential von (1)

$$d\left(\frac{P}{W}\right) = \frac{r}{w} \cdot d\left(\frac{K}{N}\right) + \frac{K}{N} \cdot d\left(\frac{r}{w}\right) \quad (2)$$

in dem der Ausdruck $\frac{r}{w} \cdot d\left(\frac{K}{N}\right)$ den Einfluß der Veränderung der der Kapitalintensität auf die Verteilung und $\frac{K}{N} \cdot d\left(\frac{r}{w}\right)$ den Einfluß der Veränderung der Zins-Lohn-Relation angibt.

Betrachtet man nun, wie es in der makroökonomischen Version der Grenzproduktivitätstheorie der Fall ist, das Preisverhältnis der Faktoren als Funktion der Relation der Faktormengen,²⁾ so kann man mit Hilfe der Beziehung (2) die Frage beantworten, wie sich die Verteilung ändert, wenn sich die Kapitalintensität erhöht. Durch Umformung von (2) erhält man:

$$\frac{d\left(\frac{P}{W}\right)}{d\left(\frac{K}{N}\right)} = \frac{r}{w} + \frac{K}{N} \cdot \frac{d\left(\frac{r}{w}\right)}{d\left(\frac{K}{N}\right)} = \frac{r}{w} \left(1 + \frac{d\left(\frac{r}{w}\right)}{d\left(\frac{K}{N}\right)} \cdot \frac{K}{w} \right)$$

oder durch Einsetzen der Robinsonschen Definitionsgleichung für die Substitutionselastizität:

$$\frac{d\left(\frac{P}{W}\right)}{d\left(\frac{K}{N}\right)} = \frac{r}{w} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \quad \left| \begin{array}{ll} > 0 & \text{für } \sigma > 1 \\ = 0 & \text{für } \sigma = 1 \\ < 0 & \text{für } \sigma < 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß bei einer Erhöhung der Kapitalintensität die Veränderung der Anteile der Faktoren davon abhängt, ob die Substitutionselastizität größer oder kleiner als Eins ist. Ist $\sigma > 1$, so verschiebt sich die Verteilung bei steigender Kapitalintensität zugunsten der Unternehmer und wir haben das Hicks'sche Ergebnis, daß "an increase in the supply of any factor will increase its relative share, i. e. its proportion of the National Dividend if its 'elasticity of substitution' is greater than unity."³⁾

1) Die folgende Analyse folgt H. Frisch. Vgl. H. Frisch, Die CES-Funktion, a.a.O. S. 419 - 44, insbes. S. 423 ff

2) Dies ist die neoklassische Fragestellung, die Hicks in seinem Buch "The Theory of Wages" untersuchte und die ihn zur Definition der Substitutionselastizität veranlaßte.

3) Vgl. J. R. Hicks, The Theory of Wages, a.a.O. S. 117

Ist $\sigma < 1$, so ist die obige Ableitung negativ und die Verteilung verschiebt sich bei steigender Kapitalintensität zugunsten des Faktors Arbeit. Ist schließlich $\sigma = 1$, so wird die Zunahme der Kapitalintensität durch eine Abnahme der Zins-Lohn-Relation genau kompensiert und die Verteilungsrelation bleibt unverändert.

Die Vorstellung, daß das Preisverhältnis der Faktoren eine Funktion des Faktoreinsatzmengenverhältnisses ist, ist dann gerechtfertigt, wenn man berücksichtigt, daß bei gegebenen Grenzproduktivitätskurven (bei gegebener Produktionsfunktion) die Produktionsfaktoren im Verhältnis ihrer relativen Seltenheit entlohnt werden, da nach dem Gesetz des abnehmenden Ertragszuwachses das Grenzprodukt jedes Faktors von seiner relativen Seltenheit zu den anderen Faktoren bestimmt wird und sich die Faktorpreise nach den entsprechenden Grenzprodukten bilden, sich also wie die Grenzproduktivitäten verhalten. Da die relative Seltenheit der Produktionsfaktoren nur für die Volkswirtschaft als Ganzes ein gegebener Tatbestand ist, handelt es sich hier um eine makroökonomische Betrachtungsweise, die nur vom gesamtwirtschaftlichen Standpunkt aus sinnvoll erscheint. Für einen einzelnen Unternehmer oder eine Branche dagegen liegen die Dinge jedoch genau umgekehrt. Dort ist die Lohn-Zins-Relation vom Markt her vorgegeben und die Unternehmer passen sich mit ihrem Faktoreinsatzverhältnis an dieses Datum an. Diese Betrachtungsweise entspricht einer mikroökonomischen Betrachtungsweise, wie sie den mikroökonomischen Grenzproduktivitätssätzen zugrunde liegt. In dieser mikroökonomischen Betrachtungsweise ist daher das Zins-Lohn-Verhältnis die unabhängige Variable und die Kapitalintensität die abhängige Variable.

Betrachtet man in diesem Sinne in der Kapitalintensitätsfunktion die Zins-Lohn-Relation als die unabhängige Variable und das Faktoreinsatzverhältnis als die abhängige Variable, so läßt sich mit Hilfe von Gleichung(2) die Frage beantworten, wie sich die Verteilung infolge einer Änderung der Zins-Lohn-Relation verändert. Dazu

formt man Gleichung (2) zu (4) um:

$$\frac{d(\frac{P}{W})}{d(\frac{r}{w})} = \frac{r}{w} \cdot \frac{d(\frac{K}{N})}{d(\frac{r}{w})} + \frac{K}{N} = \frac{K}{N} \left(1 + \frac{d(\frac{K}{N})}{d(\frac{r}{w})} \cdot \frac{\frac{r}{w}}{\frac{K}{N}} \right)$$

$$= \frac{K}{N} \cdot (1 - \sigma) \quad \left| \begin{array}{ll} > 0 & \text{für } \sigma < 1 \\ = 0 & \text{für } \sigma = 1 \\ < 0 & \text{für } \sigma > 1 \end{array} \right. \quad (4)$$

Wie aus diesem Ausdruck zu ersehen ist, hängt auch die Verteilungsänderung infolge einer Veränderung des Faktorpreisverhältnisses von der Höhe von σ ab. Ist $\sigma > 1$, so ist obiger Ausdruck negativ, was bedeutet, daß eine Erhöhung der Zins-Lohn-Relation zu einer Verschiebung der Verteilungsrelation zuungunsten der Unternehmer führt, ist dagegen $\sigma < 1$, so führt eine Steigerung des Zins-Lohn-Verhältnisses zu einer Umverteilung zugunsten der Unternehmer, und bei $\sigma = 1$ schließlich bleibt die Verteilungsrelation unverändert.

2. Technischer Fortschritt und Einkommensverteilung

Gegenstand unserer bisherigen Untersuchung in diesem Kapitel war es, die Auswirkungen von Änderungen des Faktorpreisverhältnisses und der Kapitalintensität auf die Einkommensverteilung aufzudecken. Dabei erhielten wir das Ergebnis, daß sich infolge solcher Veränderungen die Einkommensverteilung sowohl zugunsten der Unternehmer als auch zugunsten der Arbeiter verschieben kann. Welcher dieser beiden Fälle wirklich eintritt, hängt davon ab, ob die Substitutionselastizität größer oder kleiner als Eins ist. Dieses Ergebnis besitzt zwar einen Allgemeinheitsgrad, wie er kaum zu übertreffen ist, da zu seiner Erzielung (außer unserer generellen Annahme der linearen Homogenität) weder spezielle Annahmen über die Form der Produktionsfunktion noch über die Art des technischen Fortschritts notwendig sind; doch ist die zugrunde liegende Analyse insofern unvollständig, als der technische Fortschritt nicht explizit berücksichtigt wurde.

Berücksichtigt man jedoch, daß die Grenzproduktivitäten von Arbeit und Kapital und damit auch die Faktorpreise außer vom Faktoreinsatzverhältnis auch vom technischen Fortschritt abhängig sind, so erscheint es als etwas unbefriedigend, wenn man bei der Untersuchung der Bedeutung der Substitutionselastizität für die Einkommensverteilung den technischen Fortschritt nicht explizit mitberücksichtigt. In der folgenden Analyse soll deshalb untersucht werden, inwieweit die bisherigen Ergebnisse durch die explizite Einführung des technischen Fortschritts modifiziert werden. Diese Analyse besteht letztlich in nichts anderem als in der Untersuchung, ob und unter welchen Bedingungen ein technischer Fortschritt im Sinne von Hicks neutral, arbeitssparend oder kapitalsparend wirkt. Denn nach Hicks ist ein technischer Fortschritt neutral, wenn er (bei konstanter Kapitalintensität) die Grenzproduktivitäten des Kapitals und der Arbeit im gleichen Verhältnis erhöht; arbeitssparend, wenn er die Grenzproduktivität des Kapitals

stärker erhöht als die der Arbeit, und kapitalsparend, wenn er die Grenzproduktivität der Arbeit stärker erhöht als die des Kapitals.¹⁾ Da das Verhältnis der Grenzproduktivitäten bzw. das Faktorpreisverhältnis bei konstanter Kapitalintensität nur noch vom technischen Fortschritt abhängig ist, verändert sich bei einem Hicks-neutralen technischen Fortschritt die Zins-Lohn-Relation nicht; sie steigt bei einem Hicks-arbeitssparenden technischen Fortschritt und fällt, wenn der technische Fortschritt Hicks-kapitalsparend ist. Entsprechend verändert sich die Einkommensverteilung. Die Verteilungsrelation bleibt konstant, wenn der technische Fortschritt neutral ist. Ist der technische Fortschritt dagegen arbeitssparend, so nimmt bei gegebener Kapitalintensität die Lohnquote ab und die Einkommensverteilung verändert sich zugunsten der Unternehmer. Umgekehrt nimmt bei einem kapitalsparenden technischen Fortschritt die Lohnquote zu und die Einkommensverteilung ändert sich zugunsten der Arbeiter.

Definieren wir nun im Anschluß an David und van de Klundert den technischen Fortschritt als eine Erhöhung der Effizienz der Produktionsfaktoren, die sich auf den Output wie eine quantitative Erhöhung der physischen Einsatzmengen der Faktoren (bei konstanter Effizienz) auswirkt, so stellt sich uns die Frage, wann ein solcher faktorerhöhender technischer Fortschritt im Sinne von Hicks neutral, arbeitssparend oder kapitalsparend ist.

Um die Untersuchung jedoch nicht unnötig zu verkomplizieren, wollen wir im folgenden von einer Produktionsfunktion mit konstanter Substitutionselastizität ausgehen. Diese vereinfachende Annahme führt zu keiner wesentlichen Einschränkung des Gültigkeitsbereichs der Ergebnisse, wenn wir eine CES-Produktionsfunktion unterstellen, da in diesem Fall auch bei einer Konstanz der Substitutionselastizität σ alle Werte zwischen Null und Unendlich annehmen kann. Nachdem die CES-Funktion von David und van de Klundert sowohl bezüglich der Substitutionselastizität als auch bezüglich der Konzeption des technischen Fortschritts unseren Anfor-

1) Vgl. J. R. Hicks, The Theory of Wages, a.a.O. S. 121 f

derungen gerecht wird, können wir uns daher in der folgenden Untersuchung dieser Produktionsfunktion bedienen.

Nach David und van de Klundert besitzt die CES-Funktion die Form

$$Y = \left[(AK)^{-\frac{1}{\sigma}} + (BN)^{-\frac{1}{\sigma}} \right]^{-\sigma} \quad (5)$$

in der A und B die Effizienzindizes von Kapital und Arbeit sind und $\frac{1}{\sigma} - 1$ ist. Bildet man von dieser Funktion die partiellen Ableitungen nach K und N, so erhält man für die Faktorpreise r und w die Beziehungen

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = A^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{Y}{K} \right)^{1+\frac{1}{\sigma}} \quad (6)$$

und

$$w = \frac{\partial Y}{\partial N} = B^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{Y}{N} \right)^{1+\frac{1}{\sigma}} \quad (7)$$

und für die Zins-Lohn-Relation den Ausdruck

$$\frac{r}{w} = \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(\frac{K}{N} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (8)$$

Aus dieser Beziehung geht deutlich hervor, daß bei gegebenem σ das Lohn-Zins-Verhältnis nicht nur von der Kapitalintensität abhängig ist, sondern sich auch infolge eines technischen Fortschritts verändern kann. Infolgedessen ist auch die Einkommensverteilung vom Stand des technischen Wissens nicht unabhängig. Unmittelbar zu erkennen ist das aus Gleichung (9), in der die Einkommensverteilung in Abhängigkeit von den Größen der Produktionsfunktion direkt dargestellt ist:

$$\frac{P}{W} = \frac{r \cdot K}{w \cdot N} = \frac{u}{1-u} = \left(\frac{BN}{AK} \right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \quad (9)$$

Dabei bezeichnen u und 1-u die Profit- und die Lohnquote. Verändert sich nun die Kapitalintensität oder tritt ein technischer Fortschritt ein, so verändert sich die Verteilungsrelation entsprechend Gleichung (10):

$$\frac{P/W}{P/W} = \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \cdot (b - a + n - k) \quad (10)$$

In dieser Gleichung bedeutet ein Punkt über einer Variablen die Ableitung der betreffenden Größe nach der Zeit und

a, b, k und n die Veränderungsraten der Effizienzparameter von Kapital und Arbeit sowie die Wachstumsraten des Kapitalstocks und des Arbeitseinsatzes.

Bei konstanter Kapitalintensität (d. h. $k - n = 0$) ist der Einfluß eines faktorerhöhenden technischen Fortschritts auf die Einkommensverteilung demnach davon abhängig, ob σ größer oder kleiner als Eins ist. Ist $a > b$, der technische Fortschritt also überwiegend kapitalerhöhend, so verändert sich die Einkommensverteilung zugunsten der Arbeiter, wenn $\sigma < 1$ ist, d. h. der technische Fortschritt wirkt dann kapitalsparend im Sinne von Hicks. Ist dagegen $\sigma > 1$, so verschiebt ein überwiegend kapitalerhöhender technischer Fortschritt die Verteilungsrelation zugunsten der Unternehmer und der technische Fortschritt wirkt Hicks-arbeitsparend. Wenn umgekehrt $a < b$ ist, der technische Fortschritt also überwiegend arbeitserhöhend ist, so verändert sich bei $\sigma < 1$ die Einkommensverteilung zugunsten der Unternehmer. Der technische Fortschritt wirkt dann Hicks-arbeitssparend. Ist aber $\sigma > 1$, so erhöht ein überwiegend arbeitserhöhender technischer Fortschritt die Lohnquote, was bedeutet, daß der Fortschritt Hicks-kapitalsparend wirkt.

Von besonderem Interesse ist die Frage, wie sich die Einkommensverteilung verändert, wenn der technische Fortschritt Harrod-neutral ist. Bekanntlich ist der technische Fortschritt Harrod-neutral, wenn bei einem konstanten Kapitalkoeffizienten die Grenzproduktivität des Kapitals konstant bleibt, d. h. wenn $\dot{r}/r = 0$ ist. Da auf Grund von Gleichung (6)

$$\frac{\dot{r}}{r} = (1 - \frac{1}{\sigma}) \cdot a + \frac{1}{\sigma} \cdot (y - k)$$

ist, ist der technische Fortschritt bei $\sigma \neq 1$ nur dann Harrod-neutral, wenn $a = 0$ ist. Dann ist der technische Fortschritt rein arbeitserhöhend, woraus folgt, daß ein Harrod-neutraler Fortschritt die Einkommensverteilung zugunsten bzw. zuungunsten der Unternehmer verändert, je nachdem ob σ kleiner oder größer als Eins ist.

Analog läßt sich zeigen, daß ein technischer Fortschritt

bei $\sigma \neq 1$ nur dann neutral im Sinne Solows ist, wenn $b = 0$ ist, d. h. wenn der technische Fortschritt rein kapitalerhöhend ist. Auch im Falle eines Solow-neutralen Fortschritts hängt die Änderungsrichtung der Verteilungsrelation davon ab, ob σ größer oder kleiner als Eins ist.

Die Einkommensverteilung wird bei konstanter Kapitalintensität überhaupt nicht verändert, wenn entweder $a = b$ ist oder wenn $\sigma = 1$ ist. Bei $\sigma = 1$ wirkt also jede Art von technischem Fortschritt Hicks-neutral, egal ob er vorwiegend arbeitserhöhender oder vorwiegend kapitalerhöhender Natur ist. Gleichzeitig ist in diesem Fall der technische Fortschritt auch immer Harrod- und Solow-neutral.

Im Rahmen unserer bisherigen Untersuchung der Beziehungen zwischen Substitutionselastizität und Einkommensverteilung haben wir festgestellt, daß die Einkommensverteilung aus gesamtwirtschaftlicher Sicht bei gegebener Form der makroökonomischen Produktionsfunktion von der Höhe der Kapitalintensität und vom Stand des technischen Wissens determiniert wird. Ändert sich nun entweder die Kapitalintensität oder tritt ein technischer Fortschritt ein, so hängt die Änderungsrichtung der Einkommensverteilung davon ab, ob die Substitutionselastizität größer oder kleiner als Eins ist. Die Einkommensverteilung ist demnach durchaus variabel und scheint a priori durchaus nicht irgendwie auf eine bestimmte Relation fixiert zu sein. Um so bemerkenswerter ist die Tatsache, daß die Verteilungsrelation in den letzten hundert Jahren trotz starker Veränderungen der Kapitalintensität und erheblicher Schwankungen in der jährlichen Rate des technischen Fortschritts nur relativ geringen Veränderungen unterworfen war.¹⁾ Diese bemerkenswerte Konstanz der Lohn-

1) Die Vorstellung einer historisch langfristigen Konstanz der Einkommensverteilung stützt sich vor allem auf Untersuchungen von Simon Kuznets, der sein

und Profitquote paßte vielen Theoretikern absolut nicht in ihr theoretisches Konzept und erschien ihnen daher wie Keynes als "a bit of a miracle"¹⁾ oder wie Solow es ausdrückte als "one of the great constants of nature, like the velocity of light or the incest taboo".²⁾

Aus der Sicht des bisher Gesagten wäre eine Konstanz der Einkommensverteilung nur erklärlich, wenn die Substitutionselastizität gerade den Wert Eins besäße oder wenn die Veränderungsrate der Kapitalintensität gerade so wäre, daß sie die Wirkung des technischen Fortschritts kompensieren würde, so daß $a+k = b+n$ wäre.³⁾ Doch müßte es genauso als "a bit of a miracle"

Anm. 1, Fortsetzung

Material folgendermaßen interpretiert: "The first conclusion ... is the relative constancy of the distribution between service and property incomes until the very recent decade." (Siehe S. Kuznets, Long-Term Changes in the National Income of the United States of America since 1870, in: Income and Wealth of the United States, Trends and Structure, edited by S. Kuznets; Income and Wealth Series II, Baltimore 1952, S. 135 ff) Kuznets stützt seine Feststellung auf folgende Arbeiten: W. I. King, The Wealth and Income of the People of the United States, New York 1915; S. Kuznets, National Product since 1869, NBER, New York 1936; derselbe, National Income and its Composition, 2 Bde., NBER, New York 1941.

Diese relative Konstanz der Einkommensverteilung wird in neueren Arbeiten jedoch immer mehr bestritten. Vgl. etwa R. M. Solow, A Skeptical Note on the Constancy of Relative Shares, in: The American Economic Review, Vol. 48 (1958), S. 618 - 631, und J. Kravis, Relative Income Shares in Fact and Theory, in: The American Economic Review, Vol. 49 (1959), S. 917 - 949

- 1) Siehe J. M. Keynes, Relative Movements of Real Wages and Output, in: The Economic Journal, Vol. 49 (1939), S. 34 - 49, hier S. 49
- 2) Siehe R. M. Solow, A Skeptical Note ..., a.a.O. S. 618
- 3) M. Bronfenbrenner hat zwar nachgewiesen, "that conventional marginal distribution theory does in fact imply considerable constancy of relative shares, provided only that the elasticity of substitution

erscheinen, wenn die Substitutionselastizität gerade immer gleich Eins wäre, und auch die Realisierung der zweiten Bedingung ($b-a+n-k = 0$) ist a priori durchaus nicht einzusehen, solange nicht irgendwelche ökonomische Verhaltensweisen aufgedeckt werden können, die - zumindest langfristig - zu einer tendenziellen Realisierung dieser Bedingung führen.

Es ist nun tatsächlich möglich, die in der Wirklichkeit beobachtete Unabhängigkeit der Einkommensverteilung von der Höhe der Kapitalintensität und vom technischen Fortschritt aus bestimmten, ökonomisch rationalen Verhaltensweisen der Wirtschaftssubjekte heraus zu erklären. Dabei ist es sogar möglich, diesen Sachverhalt auf zwei völlig verschiedene Verhaltensweisen zurückzuführen, die auch zu zwei völlig verschiedenen Ergebnissen bezüglich der letztlich für die Einkommensverteilung verantwortlichen Größen führen. Einmal ist die in der Wirklichkeit beobachtete langfristige Konstanz der Einkommensverteilung das Ergebnis eines langfristigen Gleichgewichtszustandes und die Einkommensverteilung selbst von der Höhe der Substitutionselastizität völlig unabhängig und im zweiten Fall ist die Unabhängigkeit der Einkommensverteilung von der Höhe der Kapitalintensität und vom technischen Fortschritt das Ergebnis eines Maximierungskalküls der Kapitalisten und die Einkommensverteilung selbst aus-

Anm. 3, Fortsetzung

between capital and labor is not well below unity", da die Einkommensverteilung gegenüber Veränderungen der Substitutionselastizität ziemlich unempfindlich ist, doch ist diese Begründung für die Tatsache, daß die Lohnquote angesichts von eindeutigen Trends in der Entwicklung der Kapitalintensität und des technischen Fortschritts langfristig praktisch überhaupt keinen Trend aufweist, nach Auffassung des Verfassers nicht befriedigend. Vgl. M. Bronfenbrenner, A Note on Relative Shares and the Elasticity of Substitution, in: The Journal of Political Economy, Vol. 68 (1960), S. 284 - 287, insbesondere S. 287

schließlich von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig.

Auf die erste Erklärungsmöglichkeit werden wir im folgenden Kapitel zurückkommen, in dem wir uns mit Problemen der modernen Wachstumstheorie und dabei insbesondere mit der Bedeutung der Substitutionselastizität für Existenz, Lage und Stabilität langfristiger Gleichgewichte befassen werden, die zweite Erklärungsmöglichkeit dagegen soll im folgenden Abschnitt ausführlich dargestellt und beurteilt werden.

3. Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Einkommensverteilung in einem Modell mit endogen determinierter Sparquote

Eine der Voraussetzungen unserer bisherigen Analyse der funktionalen Einkommensverteilung war die Annahme, daß die gesamtwirtschaftliche Sparquote und damit letztlich auch die Höhe des vorhandenen Kapitalstocks exogen gegeben ist. Obwohl diese Voraussetzung in den bisherigen Modellen zur Analyse und Erklärung des Wachstums und der Einkommensverteilung allgemein üblich ist, scheint uns diese Annahme nicht ganz unproblematisch zu sein. Um die Problematik dieser Annahme zu verdeutlichen, muß im folgenden die in den bisherigen Modellen unterstellte Keynes'sche Sparfunktion etwas genauer betrachtet werden.

Die Keynes'sche Sparfunktion $S = S(Y)$ enthält als einzige Determinante das Einkommen. Vernachlässigt man einmal die Möglichkeit eines autonomen Konsums, dem ein ebenfalls autonomes (negatives) Sparen entspricht, der aber allenfalls bei kurzfristigen Untersuchungen eine gewisse Bedeutung annehmen dürfte, so finden alle nicht explizit berücksichtigten Determinanten des Sparens ihren Ausdruck in der Höhe der durchschnittlichen und/oder marginalen Sparquote. Keynes betrachtet nun die Sparquote als einen makroökonomischen Verhaltensparameter und nimmt sie als exogen gegeben an. In der neoklassischen Wachstumstheorie wird sie außerdem, wie wir im folgenden Kapitel noch sehen werden, grundsätzlich als konstant angenommen, wobei die Wirkungen fallweiser exogener Änderungen besonders analysiert werden. Setzt man nun aber voraus, daß eine Volkswirtschaft sich immer im Gleichgewicht befindet, daß also die Höhe des geplanten Sparens immer gleich der Höhe der geplanten Investitionen ist, so ist unmittelbar einleuchtend, daß damit implizit vorausgesetzt wird, daß die Höhe der Kapitalbil-

dung letztlich ebenfalls von der Höhe der exogen gegebenen Sparquote abhängig ist.

Es gibt nun zwar gewichtige theoretische und empirische Argumente für diese Keynes'sche Hypothese, daß die Höhe des Sparens außer von der Höhe des Einkommens von keinen weiteren modellendogenen Determinanten beeinflusst wird und daß deshalb die Höhe der Sparquote tatsächlich mit einem gewissen Recht als ein modell-exogen determinierter Strukturparameter betrachtet werden kann, doch sollte andererseits nicht übersehen werden, daß Sparen nicht nur Folge einer Konsumententscheidung ist, nämlich jener, aus welchen Motiven auch immer nicht zu konsumieren, sondern daß umgekehrt auch die Höhe des Konsums Folge einer Sparentscheidung ist, wobei in einem intertemporalen Nutzenvergleich der an sich mögliche Gegenwartskonsum mit einem um den Zinsertrag erhöhten Zukunftskonsum verglichen wird. Dabei sind die Opportunitätskosten, die ein gegenwärtiger Konsum verursacht, um so höher, je höher der Zinssatz ist. Wird dieser Nutzenkalkül als ökonomisch rational akzeptiert, so können wir nicht weiter von der Keynes'schen Hypothese ausgehen, daß das Volkseinkommen die einzige endogene Determinante des Sparens sei. Vielmehr müssen wir dann auch den Zinssatz als eine Determinante des Sparens akzeptieren und explizit berücksichtigen. Damit folgen wir der alten klassischen Vorstellung, daß außer der Investition auch das Sparen eine Funktion des Zinses ist, wobei der Zins jener Preis ist, der Sparen und Investieren in Übereinstimmung bringt. Gingen wir oben davon aus, daß in der Keynes'schen Sparfunktion alle Determinanten des Sparens außer dem Einkommen ihren Niederschlag in der Höhe der Sparquote finden, so müssen wir jetzt davon ausgehen, daß die Sparquote nicht mehr exogen gegeben, sondern ihrerseits eine Funktion des in den neoklassischen Wachstumsmodellen endogen determinierten Zinses ist. Die in der neoklassischen Theorie verwendete

Keynes'sche Sparfunktion müßte demnach durch die Funktion $S(r, Y) = s(r) \cdot Y$ ersetzt werden.

Im folgenden soll nun ein Modell vorgestellt werden, in dem die Sparquote nicht mehr exogen gegeben ist, sondern endogen determiniert wird. Dagegen sollen die Raten des arbeits- und kapitalerhöhenden technischen Fortschritts exogen gegeben sein. Es läßt sich nun zeigen, daß im Rahmen eines solchen Modells die Substitutionselastizität unter bestimmten, nicht unrealistischen Bedingungen auch im Gleichgewicht für die Einkommensverteilung von ausschlaggebender Bedeutung ist. Da die Sparquote nun eine modellendogene Variable ist, ist die Höhe des Sparens zu einem bestimmten Zeitpunkt, in dem die verfügbaren Mengen von Arbeit und Kapital fest vorgegeben sind und daher auch das (Vollbeschäftigungs-)Volkseinkommen eindeutig bestimmt ist, trotzdem nicht festgelegt. Die Investoren können daher in jedem Zeitpunkt beliebig viel investieren, sofern sie nur bereit sind, den bei der gewünschten Investitionshöhe sich einstellenden Zinssatz zu bezahlen. Wir gehen in diesem Modell also davon aus, daß die zur Realisierung des gewünschten Investitionsvolumens notwendigen Ersparnisse immer zur Verfügung stehen. Dabei ist es für das Modell selbst nicht von Bedeutung, auf welche Weise die dazu erforderlichen Sparmittel aufgebracht werden. Trotzdem soll hier versucht werden, einen ökonomischen Mechanismus zu skizzieren, der dafür sorgen könnte, daß die zur Investition erforderlichen Mittel immer zur Verfügung stehen.

In einer reinen Tauschwirtschaft ohne Geld wäre es vorstellbar bzw. naheliegend, daß der Ausgleich zwischen Investieren und Sparen über den Realzins erfolgt. Dieser grenzt einerseits die Höhe der gewünschten Investitionen ein, da nur solche Investitionen geplant werden, deren Rendite mindestens gleich dem Realzins ist, andererseits induziert ein bestimmter realer Zinssatz ein freiwilliges Sparen in ganz bestimmter Höhe,

das um so höher ist, je höher der Realzins ist. In einer solchen Wirtschaft sind die geplante Investition und das geplante Sparen immer gleich, ist die Volkswirtschaft also immer im Gleichgewicht. Gleichzeitig herrscht in einer solchen Volkswirtschaft immer Vollbeschäftigung, da die flexiblen relativen Güter- und Faktorenpreise dafür sorgen, daß alle Faktoren im klassischen Sinne vollbeschäftigt sind.

Geht man dagegen von einer Geldwirtschaft aus, was zweifellos realistischer ist, so kann man sich vorstellen, daß die Investoren ihre Investitionen mit Krediten finanzieren. Diese führen, soweit sie nicht durch freiwillige Ersparnisse abgedeckt sind, zu einer Geldschöpfung. Infolge dieser Geldschöpfung steigen die Güterpreise und verursachen einen Zwangssparprozeß im Wicksellschen Sinne, durch den die gewünschten Investitionen im nachhinein durch unfreiwillige Ersparnisse finanziert werden. Auch in diesem Fall bleibt wegen der angenommenen Flexibilität der Preise die Vollbeschäftigung immer erhalten.

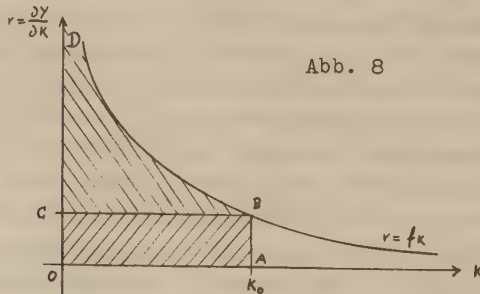
Da auf Grund der endogen angenommenen Sparquote bei einem gegebenen Volkseinkommen die Höhe des Sparens nicht mehr eindeutig determiniert ist, kann bei dieser Betrachtungsweise auch die Höhe der Kapitalintensität und die Wachstumsrate des Kapitalstocks bei einem gegebenen Volkseinkommen nicht mehr eindeutig determiniert sein. Es fragt sich deshalb, welche Kapitalintensität die Unternehmer in diesem Fall realisieren werden. Hier scheint es nun durchaus naheliegend und ökonomisch rational zu sein, wenn die Unternehmer bzw. die Kapitalisten (die in diesem Modell identisch sein sollen) das ihnen zufließende (Profit-)Einkommen zu maximieren versuchen. Im folgenden soll deshalb angenommen werden, daß von den Kapitalisten die gesamtwirtschaftliche Profitsumme maximiert wird. Dies kann entweder dadurch geschehen, daß man annimmt, daß es in der gesamten Wirtschaft nur einen einzigen Investor

gibt, oder indem man annimmt, daß die vielen Kapitalisten, die man in der Regel in einer Volkswirtschaft antrifft, auf Grund zentraler Lenkung oder freiwilliger Übereinkunft eine "gemeinsame Gewinnmaximierung" betreiben, d. h. ihr gemeinsames Einkommen zu maximieren versuchen. Denkbar ist aber auch, daß der Gesamtprofit auch dann ein Maximum wird, wenn jeder Kapitalist für sich sein persönliches Einkommen maximiert.

Da sich nach der Grenzproduktivitätstheorie die Entlohnungssätze der Faktoren nach deren Grenzproduktivitäten richten und im Falle einer linear-homogenen Produktionsfunktion das Produkt bei Entlohnung nach der Grenzproduktivitätstheorie gerade ausgeschöpft wird, beträgt der zu maximierende Gesamtprofit:

$$P = r \cdot K = Y - w \cdot N \quad (11)$$

Die Höhe des Zinssatzes ist nun bei einem gegebenen Arbeitseinsatz N_0 selbst wieder von der Höhe des eingesetzten Kapitals abhängig, und zwar in einer durch das Gesetz vom abnehmenden Grenzertrag bestimmten Weise. Diese Abhängigkeit ist in Abb. 8 dargestellt.



In dieser Abbildung läßt sich, wie J. B. Clark gezeigt hat, die funktionale Einkommensverteilung für den Fall darstellen, daß in der Volkswirtschaft ein bestimmter Kapitalstock $K_0 = OA$ vorhanden ist. Ist dies der Fall, so werden die Profite $P = r \cdot K$ durch

das Rechteck OABC dargestellt und die gesamte Lohnsumme $W = w \cdot N_0$ durch die Fläche CBD. Die Fläche CBD stellt deshalb die Lohnsumme dar, weil $\int_0^{K_0} \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot dK = Y$ ist, d. h. die Gesamtfläche OABD unter der Grenzproduktivitätskurve des Kapitals das gesamte Volkseinkommen darstellt, und weil andererseits $w \cdot N_0 = Y - r \cdot K_0$ ist.

Ist nun, wie in den üblichen neoklassischen Wachstumsmodellen, die Sparquote exogen gegeben, so ist dadurch im Gleichgewicht die Kapitalintensität eindeutig determiniert und damit bei gegebenem N_0 auch die Höhe von K_0 eindeutig festgelegt. Damit ist auch die Einkommensverteilung, wie aus Abb. 8 unmittelbar zu erkennen ist, eindeutig festgelegt. Ist die Sparquote dagegen eine endogene Variable, wie es in unserem Modell der Fall ist, so sind die Kapitalisten in der Wahl ihrer Kapitalintensität frei und können die für sie vorteilhafteste Kapitalintensität realisieren. Wollen die Kapitalisten ihren Gesamtprofit maximieren, was in unserem Modell angenommen wird, so muß auch das Rechteck OABC maximal werden, d. h. die Kapitalisten müssen genau so viel investieren, daß gerade so viel Kapital eingesetzt wird, daß $P = r \cdot K$ ein Maximum wird. Da in einem bestimmten Zeitpunkt das Arbeitspotential N_0 gegeben ist, ist bei gegebener Produktionsfunktion r und damit auch P nur noch von der Höhe des eingesetzten Kapitals abhängig und es gilt

$$P(K) = r(K) \cdot K$$

Differenziert man diese Beziehung nach K und setzt die Ableitung gleich Null, so erhält man

$$\frac{dP}{dK} = r(K) + K \cdot \frac{dr}{dK} = 0$$

$$\text{oder} \quad r \cdot \left(1 + \frac{dr}{dK} \cdot \frac{K}{r}\right) = 0$$

Da bei $r = 0$ die Profitsumme Null ist, liegt ein Maximum dann vor, wenn

$$\frac{dr}{dK} \cdot \frac{K}{r} = -1 \quad (12)$$

ist.¹⁾

Da $\frac{dr}{dK} \cdot \frac{K}{r}$ aber nichts anderes als die Elastizität der Grenzproduktivitätskurve des Kapitals darstellt, liegt demnach ein Profitmaximum an der Stelle vor, an der die Grenzproduktivitätskurve des Kapitals gerade eine Elastizität von Eins aufweist.

Gehen wir nun davon aus, daß das Produkt mit Hilfe einer CES-Funktion erstellt wird, so können wir die Kapitalintensität, die im Profitmaximum realisiert sein muß, direkt berechnen. Dazu leiten wir die Produktionsfunktion

$$Y = [(AK)^{-\varphi} + (BN)^{-\varphi}]^{-1/\varphi}$$

nach K ab und erhalten für r

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = [(AK)^{-\varphi} + (BN)^{-\varphi}]^{-\frac{1}{\varphi}-1} \cdot A^{-\varphi} \cdot K^{-\varphi-1} \quad (13)$$

Diese Gleichung in (11) eingesetzt ergibt

$$P = r \cdot K = [(AK)^{-\varphi} + (BN)^{-\varphi}]^{-\frac{1}{\varphi}-1} \cdot (AK)^{-\varphi}$$

Da wir von einer gegebenen Produktionsfunktion und einer exogen gegebenen Arbeitsmenge $N = N_0$ ausgehen, sind A, B, N und φ gegebene Konstante, weshalb K die einzige Variable ist. Leitet man diesen Ausdruck nach K ab, setzt die Ableitung gleich Null und berücksichtigt, daß in einem Maximum $r > 0$ sein muß und außerdem, daß in der CES-Funktion $\varphi \neq 0$ bzw. $\sigma \neq 1$ angenommen wird, so erhalten wir als profitmaximale Kapitalintensität

- 1) Genaugenommen liegt ein Maximum dann vor, wenn die zweite Ableitung d^2P/dK^2 in diesem Punkt negativ ist. Hinreichend dafür ist $f_{KKK} < 0$. Diese Bedingung folgt aus

$$\frac{d^2P}{dK^2} = 2 \cdot f_{KK} + K \cdot f_{KKK}$$

Um ein Profitmaximum zu gewährleisten, sei deshalb angenommen, daß diese Bedingung erfüllt ist.

$$(K/N)^* = \xi^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\frac{B}{A}\right) \quad (14)$$

Untersucht man nun in einer Volkswirtschaft, in der diese Kapitalintensität realisiert und damit der Gesamtprofit maximal ist, die Einkommensverteilung, so wird man feststellen, daß diese ausschließlich von der Höhe der Substitutionselastizität determiniert wird.

Um dies zu zeigen, berechnen wir zunächst den Zinssatz im Profitmaximum. Dazu setzen wir (14) in (13) ein und erhalten nach einigen Umformungen und Vereinfachungen:

$$r^* = A \cdot (1-\sigma)^{1/(1-\sigma)} \quad (15)$$

In der Situation des Gewinnmaximums hängt die Höhe des Zinssatzes also allein von der Höhe des Effizienzparameters des Kapitals A und von der Höhe der Substitutionselastizität σ ab.

Analog errechnet sich der Lohnsatz, indem man die partielle Ableitung $\frac{\partial Y}{\partial N}$ bildet und für K wieder entsprechend Gleichung (14) in der Form

$$K^* = \xi^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot \left(\frac{B}{A}\right) \cdot N \quad (14a)$$

einsetzt. Nach einigen Umformungen erhält man dann für den Lohnsatz w

$$w^* = B \cdot \sigma^{1/(1-\sigma)} \quad (16)$$

Der Lohnsatz wird also in einer Volkswirtschaft, in der die Kapitalisten ihren Gesamtprofit maximiert haben, allein von der Höhe des Effizienzparameters des Faktors Arbeit B und von der Höhe der Substitutionselastizität bestimmt.

Setzt man die Ergebnisse (14), (15) und (16) in die Gleichungen

$$u = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}$$

und
$$1-u = \frac{\partial Y}{\partial N} \cdot \frac{N}{Y}$$

ein, so erhält man für die Profitquote u und die Lohnquote 1-u

$$\begin{aligned} u &= 1 - \sigma \\ \text{und} \quad 1 - u &= \sigma \end{aligned} \quad (17)$$

und als Verteilungsrelation

$$\frac{u}{1-u} = \frac{1-\sigma}{\sigma} \quad (17a)$$

Wir finden also das etwas unerwartete Ergebnis, daß sich in einer Volkswirtschaft, in der die Gesamtprofite maximiert werden, eine Lohnquote einstellt, die gerade gleich der Substitutionselastizität σ ist. Entsprechend wird eine Profitquote in Höhe von $1 - \sigma$ angetroffen. Beide Quoten sind von keinen weiteren Parametern der Produktionsfunktion abhängig, insbesondere nicht von der Höhe der Effizienzparameter von Arbeit und Kapital. Die Einkommensverteilung ist deshalb vom technischen Fortschritt unabhängig und konstant, wenn sich die Substitutionselastizität im Zeitablauf nicht verändert. Damit besitzen wir einen ersten Erklärungsansatz für die empirisch beobachtete langfristige Konstanz der Einkommensverteilung, sofern auch empirisch nachgewiesen werden kann, daß die Substitutionselastizität tatsächlich im Zeitablauf konstant ist. Diese Unabhängigkeit der Einkommensverteilung vom technischen Fortschritt wird durch das Verhalten der Kapitalisten verursacht, da diese in ihrem Bestreben nach einem maximalen Profit immer gerade so viel investieren, daß die Wachstumsrate des Kapitalstocks die vom Bevölkerungswachstum und vom technischen Fortschritt verursachten (exogenen) Tendenzen zur Veränderung der Einkommensverteilung gerade kompensiert. Dies folgt unmittelbar, wenn man auf Grund von Gleichung (14a) die Wachstumsraten des profitmaximalen Kapitalstocks K^* berechnet. Aus (14a) erhält man nämlich durch Ableitung nach t und durch Bildung von Wachstumsraten für die Wachstumsrate des Kapitalstocks

$$k = n + b - a \quad (18)$$

Die Höhe der Wachstumsrate des Kapitalstocks k wird

demnach in dem Punkt, in dem die Kapitalisten ihr Profitmaximum erreicht haben, ausschließlich von der Höhe des Bevölkerungswachstums n und den Raten des kapital- und arbeitserhöhenden technischen Fortschritts a und b entsprechend Gleichung (18) determiniert. Setzt man diese Beziehung in Gleichung (10) ein, so kann man unmittelbar erkennen, daß das Streben der Kapitalisten nach einem gesamtwirtschaftlichen Profitmaximum tatsächlich zu einer Realisierung der oben abgeleiteten zweiten Bedingung für eine Konstanz der Einkommensverteilung $(b-a+n-k) = 0$ führt.

Mit diesem Modell besitzen wir einen ersten Erklärungsansatz für die empirische Beobachtung, daß die Einkommensverteilung offensichtlich von Veränderungen der Kapitalintensität und vom technischen Fortschritt unabhängig ist. Dabei wird der Aussagegehalt unseres Modells durch die im Modell unterstellte CES-Hypothese in keiner Weise beeinträchtigt. Denn akzeptiert man die Ausgangsbasis des Modells, so könnte gerade die empirisch beobachtete (relative) Konstanz der Einkommensverteilung ein erster Anhaltspunkt für die Vermutung sein, daß die Substitutionselastizität langfristig tatsächlich (relativ) konstant ist. Aber selbst wenn man sich der Meinung von Solow und Kravis anschließt und nicht von einer langfristigen Konstanz der Einkommensverteilung ausgeht, stehen wir in keinem Widerspruch zu unserem Modell, da, wie wir im V. Kapitel dieser Arbeit noch eingehend beweisen werden, sich am Ergebnis unseres Modells auch dann nichts ändert, wenn man die Annahme einer konstanten Substitutionselastizität aufgibt und stattdessen eine variable Substitutionselastizität unterstellt.

Unabhängig davon, ob σ nun tatsächlich im Zeitablauf konstant ist oder nicht, läßt das obige Modell darüber hinaus den Schluß zu, daß die Höhe der Substitutionselastizität nicht nur für die Veränderungsrichtung der

Einkommensverteilung von Bedeutung ist, sondern noch in weit höherem Maße für die Höhe der Verteilungsrelation selbst. So zeigt das obige Modell, daß die Höhe der Substitutionselastizität an dem Punkt, an dem die Kapitalisten ihr Profitmaximum erreicht haben, für die Höhe der Verteilungsrelation sogar allein ausschlaggebend ist.

Der wichtigste Schluß aus diesem Modell aber betrifft die Substitutionselastizität selbst. Denn aus seinen Ergebnissen erhalten wir einen ersten theoretischen Anhaltspunkt über die Höhe der Substitutionselastizität. Während wir bisher davon ausgingen, daß σ grundsätzlich alle Werte zwischen Null und Unendlich annehmen kann, müssen wir auf Grund unserer jetzigen Ergebnisse den Wertebereich für σ erheblich eingrenzen. Denn da in unserem Modell Lohn- und Profitquote im Profitmaximum σ bzw. $1-\sigma$ betragen und keine der beiden Quoten negativ sein kann, kann σ -zumindest bei Annahme einer CES-Produktionsfunktion- nur mehr Werte zwischen Null und Eins annehmen.

Dieser Schluß gilt selbst unter der Voraussetzung, daß in dem Punkt, in dem $\frac{dr}{dK} \cdot \frac{K}{r} = -1$ ist, nicht ein Profitmaximum vorliegt. Denn unabhängig davon, ob in diesem Punkt ein Profitmaximum vorliegt oder nicht, wäre der Punkt prinzipiell theoretisch trotzdem realisierbar. Dennoch dürften dabei keine negativen Verteilungsquoten auftauchen. Da solche negativen Quoten unter der Voraussetzung der neoklassischen Grundannahmen $x \in \{K, N, Y, f_K, f_N\} \geq 0$ nicht vorkommen können, im Falle einer Substitutionselastizität von größer als Eins aber offensichtlich nicht völlig auszuschließen sind, muß deshalb, um Inkonsistenzen in der Theorie zu vermeiden, der Fall $\sigma > 1$ zumindest für den Fall der CES-Produktionsfunktion ausgeschlossen werden. Aus diesem Ergebnis folgt aber, daß eine Annahme $\sigma > 1$ ökonomisch kaum mehr haltbar ist.

Dieser Schluß stellt einen beachtlichen Erkenntnisfortschritt dar, da damit auch die Veränderungsrichtung der Einkommensverteilung bei exogenen Faktormengenänderungen oder exogenen Faktorpreisveränderungen (vgl. die Beziehungen (3) und (4) dieses Kapitels) oder eines exogenen technischen Fortschritts (vgl. Beziehung (10)) eindeutig festliegt. Unbekannt bleibt jetzt in all diesen Fällen nur noch das Ausmaß der Veränderung, das von der genauen Höhe der Substitutionselastizität abhängig ist.

Bei genauerer Betrachtungsweise scheint das Ergebnis, daß σ nur kleiner als Eins sein kann, ökonomisch auch gar nicht so unplausibel zu sein. Denn auf Grund von Beziehung (4)

$$\frac{d(P/W)}{d(r/w)} = \frac{K}{N} \cdot (1 - \sigma)$$

verändert sich infolge einer Steigerung des Lohnsatzes bei konstantem Zins die Einkommensverteilung zugunsten der Arbeiter, wenn $\sigma < 1$ ist, und zugunsten der Kapitalisten, wenn $\sigma > 1$ ist. Da die Höhe der Lohnsätze von den Unternehmern bewilligt wird, wäre es bei einer Substitutionselastizität von größer als Eins für die Unternehmer ökonomisch rational, die Lohnsätze über die Grenzproduktivität der Arbeit hinaus zu erhöhen, um so einen Substitutionsprozeß zu induzieren, an dessen Ende sich die Einkommensverteilung zugunsten der Kapitalisten verbessert hätte. Dieser Prozeß könnte so lange fortgeführt werden, wie σ noch größer als Eins ist. Ist σ dagegen kleiner als Eins, so verschiebt eine Erhöhung des Lohn-Zins-Verhältnisses die Einkommensverteilung zugunsten der Arbeiter, was für die Unternehmer Grund genug sein dürfte, den Lohnsatz so gering wie möglich zu halten, keinesfalls aber über die Grenzproduktivität der Arbeit hinaus steigen zu lassen. Ein Einkommensgleichgewicht kann deshalb nur bei $\sigma < 1$ zustandekommen.

IV. Kapitel

Substitutionselastizität und Gleichgewichtswachstum

1. Die Ziele der neoklassischen Wachstumstheorie

Nachdem es schon im letzten Kapitel nicht zu umgehen war, auf einige wachstumstheoretische Beziehungen zurückzugreifen, sollen sie in diesem Kapitel in den Mittelpunkt der Diskussion gerückt werden. Dabei werden im folgenden zunächst einige im letzten Kapitel schon vorweggenommenen Ergebnisse genauer untersucht und hergeleitet und außerdem einige Fragen, die dort noch offengelassen werden mußten, einer genauen Analyse unterzogen. Darüber hinaus werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit nicht umhinkönnen, uns mit einer ganzen Reihe wachstumstheoretischer Probleme auseinanderzusetzen, wobei wir uns sowohl mit Ein-Sektor-Modellen als auch mit Mehr-Sektoren-Modellen werden befassen müssen.

Dabei ist es im Rahmen unserer Abhandlung angesichts der riesigen Flut von Beiträgen gerade zur neoklassischen Wachstumstheorie jedoch völlig unmöglich und im Zusammenhang mit unserer Fragestellung auch gar nicht notwendig, einen erschöpfenden Überblick über die gesamte neoklassische Wachstumstheorie zu bieten.¹⁾ Vielmehr werden wir uns selektiv nur mit jenen Beiträgen befassen, die uns zur Darstellung der Bedeutung der Substitutionselastizität für das Gleichgewichtswachstum wesentlich erscheinen und durch deren Zusammenstellung ein zuverlässiges Urteil über die Stellung der Substitutionselastizität im Rahmen der Wachstumstheorie möglich erscheint.

Wie schon der Begriff des Gleichgewichtswachstums erkennen läßt, befaßt sich die neoklassische Wachstumstheorie mit der langfristigen Entwicklung gleichgewichtiger Wirtschaften im Zeitablauf. Die erste Aufgabe der so verstandenen

1) Eine umfassende Darstellung der neoklassischen Wachstumstheorie, die die Diskussion bis in die jüngste Zeit mitberücksichtigt, bietet das Buch von E. Burmeister und A. R. Dobell, *Mathematical Theories of Economic Growth*, London 1970

Wachstumstheorie besteht demnach in der Auffindung jener Bewegungspfade, auf denen sich eine gleichgewichtige Wirtschaft bewegt, wenn sie durch bestimmte autonome bzw. exogene Veränderungen maßgeblicher Größen wie z. B. eines wachsenden Arbeitskräftepotentials oder eines technischen Fortschritts aus ihrem stationären Zustand herausgeworfen wird. Von besonderem Interesse ist dabei immer die Frage, ob es einen steady-state-Wachstumspfad gibt, ob also ein dynamisches Gleichgewicht existiert, in dem alle ökonomischen Variablen mit einer konstanten Rate wachsen und deshalb keine endogenen Veränderungstendenzen mehr zur Wirkung gelangen.¹⁾ Existiert ein solches langfristiges Gleichgewicht, so stellt sich natürlich unmittelbar die Frage nach der Stabilität eines derartigen Gleichgewichts, d. h. die Frage, ob ein solches langfristiges Gleichgewicht aus einer ungleichgewichtigen Situation heraus erreichbar ist oder nicht. In der Untersuchung der Stabilität von solchen langfristigen Gleichgewichten und der Herausarbeitung der betreffenden Stabilitätsbedingungen besteht die zweite Aufgabe der Wachstumstheorie. Im Rahmen unserer Fragestellung richtet sich dabei unser Interesse insbesondere auf folgende drei Punkte:

1. Welche Bedeutung besitzt die Substitutionselastizität für die Existenz von langfristigen Gleichgewichten
2. In welcher Weise beeinflusst die Substitutionselastizität den Zustand des dynamischen Gleichgewichts selbst
3. Welche Bedeutung kommt der Substitutionselastizität für die Stabilität solcher Gleichgewichte zu

Da sich die Wachstumstheorie bei der Lösung ihrer Aufgaben

1) Der Begriff des "steady state" kann deshalb als "a natural extension of the stationary state, which is a particular case of steady state at a zero rate of growth" interpretiert werden. (Siehe R. G. D. Allen, *Macro-Economic Theory*, a.a.O. S. 77, vgl. auch J. R. Hicks, *Capital and Growth*, Oxford 1965, S. 133) Von J. Robinson wird dieses langfristige dynamische Gleichgewicht auch als "golden age" bezeichnet (siehe J. Robinson, *The Accumulation of Capital*, London 1956, S. 99)

sowohl mit Ein-Sektor-Modellen als auch mit Mehr-Sektoren-Modellen befaßt, sollen auch im Rahmen unserer Diskussion diese Punkte sowohl in einfachen Wachstumsmodellen als auch in Mehr-Sektoren-Modellen eingehend untersucht werden. Dabei soll zunächst das einfachste neoklassische Wachstumsmodell - ein Ein-Sektor-Modell ohne Berücksichtigung eines technischen Fortschritts - dargestellt und diskutiert werden. Anschließend soll dieses Modell durch die Einführung eines technischen Fortschritts erweitert werden und schließlich im nächsten Kapitel durch Berücksichtigung mehrerer Sektoren zu einem Mehr-Sektoren-Modell ausgebaut werden.

2. Wachstum ohne technischen Fortschritt

a) Das einfache Wachstumsmodell von Solow

Um den Kern bzw. das Wesentliche eines neoklassischen dynamischen Gleichgewichts in möglichst klarer Form herausstellen zu können, sei im folgenden das einfachste neoklassische Wachstumsmodell dargestellt, in dem von jeglicher Art des technischen Fortschritts abstrahiert wird.¹⁾ In einem solchen Modell wird das Produkt Y , das nur aus einem einzigen Gut besteht, welches alternativ sowohl als Konsum- als auch als Kapitalgut verwendet werden kann, mit Hilfe zweier Faktoren Arbeit und Kapital gemäß einer linear-homogenen neoklassischen Produktionsfunktion erstellt. Die Mengen von Arbeit und Kapital N und K seien im Ausgangszeitpunkt gegeben. Außerdem wird angenommen, daß der Faktor Arbeit mit der exogen gegebenen konstanten Rate n wächst und daß die Sparquote s ebenfalls exogen gegeben ist. Im Gleichgewicht $I = S$ beträgt deshalb die Wachstumsrate des Kapitalstocks k

$$k = \frac{s \cdot Y}{K} \quad (1)$$

bzw. wenn man an Stelle von $Y = F(K, N)$ die Pro-Kopf-Produktionsfunktion

$$\frac{Y}{N} = y = F\left(\frac{K}{N}, 1\right) = f(x)$$

mit $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$ verwendet

$$k = s \cdot \frac{Y}{K} = s \cdot \frac{f(x)}{x} \quad (1a)$$

Wächst nun der Faktor Arbeit mit der Rate n und der Faktor Kapital mit der Rate k , so verändert sich die Kapitalintensität $K/N = x$ um die Rate:

1) Dieses Modell geht auf Solow zurück. Vgl. R. M. Solow, A Contribution ... a.a.O.
Unabhängig von Solow entwickelten fast gleichzeitig J. Meade und T. Swan ähnliche Modelle, die im wesentlichen zu den gleichen Ergebnissen führten. Vgl. J. E. Meade, A Neoclassical Theory of Economic Growth, London 1961, und T. W. Swan, Economic Growth and Capital Accumulation, in: Economic Record, Vol. 32 (1956), S. 334 - 361

$$\frac{\dot{x}}{x} = k - n = s \cdot \frac{f(x)}{x} - n \quad (2)$$

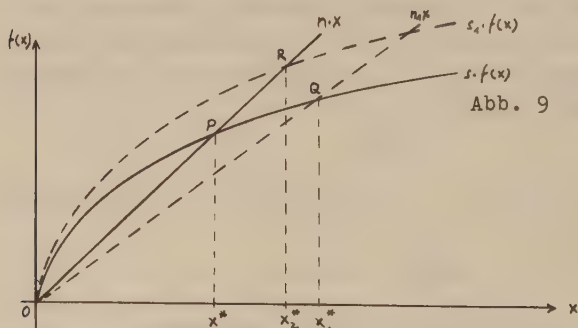
$$\text{bzw.} \quad \dot{x} = s \cdot f(x) - n \cdot x \quad (2a)$$

Die Kapitalintensität verändert sich also im Laufe der Zeit entsprechend einer nichtlinearen Differentialgleichung so lange wie $\dot{x} = s \cdot f(x) - n \cdot x$ nicht Null ist.

Läßt man einmal die triviale Lösung $x = 0$ außer Betracht, so ist ein langfristiges Gleichgewicht, in dem alle Variablen mit einer konstanten Rate wachsen, demnach erst erreicht, wenn

$$s \cdot f(x) = n \cdot x \quad (3)$$

ist. Die Lage dieses Gleichgewichts hängt von der Form der Produktionsfunktion $y = f(x)$ ab und ist in der folgenden Abbildung 9 durch den Punkt P mit der Kapitalintensität x^* dargestellt:¹⁾



In ihm bleibt die Kapitalintensität im Zeitablauf konstant. Ändert sich allerdings die Höhe der exogenen Größen n oder s , so ändert sich auch die Kapitalintensität x^* , bei der alle Variablen mit einer konstanten Rate wachsen. Fällt z. B. die Wachstumsrate der Arbeit von n auf n_1 , so erhöht sich, wie aus Abbildung 9 unmittelbar zu erkennen ist, die gleichgewichtige Kapitalintensität bei unveränderter Sparquote von x^* auf x_1^* . Entsprechend verschiebt sich bei einer Erhöhung der Sparquote von s auf s_1 die Kurve $s \cdot f(x)$ nach oben auf $s_1 \cdot f(x)$ und die gleichgewichtige Kapitalintensität

1) Vgl. R. M. Solow, A Contribution ..., a.a.O. S. 70

erhöht sich auf x_2^* .

Diese komparativ-statische Betrachtungsweise ist jedoch nur berechtigt, wenn das Gleichgewicht stabil ist. Tatsächlich ist das durch Punkt P beschriebene Gleichgewicht stabil. Das kann man sich am besten anhand von Gleichung (2) klarmachen, durch die die Veränderungsrate der Kapitalintensität beschrieben wird. Ist die Sparquote im Verhältnis zur Wachstumsrate der Bevölkerung zu hoch, so daß der Kapitalstock schneller wächst als der Faktor Arbeit, bewegen wir uns in unserem Schaubild also links des Gleichgewichtspunktes P, so ist $\frac{\dot{x}}{x} > 0$, d. h. die Kapitalintensität steigt und wir bewegen uns in unserem Schaubild auf das Gleichgewicht zu. Ist dagegen die Sparquote im Verhältnis zur Wachstumsrate der Bevölkerung zu gering, so daß der Kapitalstock weniger stark wächst als der Faktor Arbeit, bewegen wir uns in unserem Schaubild also rechts des Gleichgewichtspunktes P, so ist $\frac{\dot{x}}{x} < 0$, d. h. die Kapitalintensität sinkt und wir bewegen uns in unserem Schaubild ebenfalls auf den Gleichgewichtspunkt P zu.

Da es sich bei Gleichung (2) um eine nichtlineare Differentialgleichung handelt, kann die formale Überprüfung der Stabilität nur über eine Näherungslösung erfolgen, indem man die nichtlineare Differentialgleichung durch Entwicklung einer Taylor-Reihe linearisiert.¹⁾ Dazu setzen wir $\dot{x} = F(x)$ und beobachten das Verhalten nur in der Nähe des Gleichgewichtswertes x^* . Bezeichnen wir mit h einen beliebigen Abstand vom Gleichgewichtswert x^* und setzen an Stelle von $F(x) = F(h + x^*)$, so ergibt sich die Taylor-Reihe

$$F(x) = F(h+x^*) = F(x^*) + F'(x^*) \cdot h + \frac{1}{2!} \cdot F''(x^*) \cdot h^2 + \frac{1}{3!} \cdot F'''(x^*) \cdot h^3 + \dots$$

Wählt man nun den Abstand h so klein, daß man die Glieder, in denen h in zweiter oder höherer Potenz erscheint, vernachlässigen kann, so erhalten wir als Näherung folgende

1) Diese indirekte Methode zur Untersuchung der Stabilität eines Systems stammt von Ljapanow. Vgl. dazu A. G. J. MacFarlane, Analyse technischer Systeme. Aus dem Engl. übersetzt von H. Böttcher und H. Winter, Mannheim 1967

lineare Differentialgleichung

$$\dot{h} = F(x^*) + F'(x^*) \cdot h$$

wobei $F(x^*) = 0$ ist. Das Gleichgewicht ist nun lokal stabil, wenn die Steigung dieser Gleichung im Gleichgewicht negativ ist, und unstabil, wenn sie im Gleichgewicht positiv ist. Die Steigung dieser Funktion beträgt nun

$$\frac{dh}{dh} = F'(x^*)$$

Da $F(x) = s \cdot f(x) - n \cdot x$ ist, ist $F'(x) = s \cdot f'(x) - n$, wobei im Gleichgewicht x^* gilt:

$$n = \frac{s \cdot f(x)}{x}$$

Deshalb ist

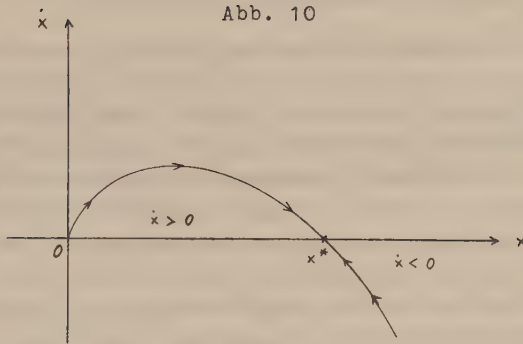
$$F'(x^*) = s \cdot f'(x) - s \cdot \frac{f(x)}{x} = s \cdot \left[f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right]$$

Da $f'(x) > 0$ wie wir an anderer Stelle gezeigt haben nichts anderes als die Grenzproduktivität des Kapitals und $f(x)/x = (Y/N)/(K/N) = Y/K$ die Durchschnittsproduktivität des Kapitals ist, ist $F'(x^*) < 0$, und zwar für jedes beliebige x^* , da bei Unterstellung einer neoklassischen Produktionsfunktion mit abnehmenden Grenzerträgen die Grenzproduktivität immer kleiner ist als die Durchschnittsproduktivität eines Faktors. Damit ist die lokale Stabilität des Gleichgewichts immer gewährleistet.

Berücksichtigt man nun außerdem, daß es eine zweite - triviale - Lösung $x_2^* = 0$ gibt, in der aber gilt $F'(0) > 0$,¹⁾ was bedeutet, daß das Gleichgewicht $x_2^* = 0$ instabil ist, so ist das Gleichgewicht x^* nicht nur lokal, sondern auch global stabil.

Am anschaulichsten werden die Zusammenhänge durch ein Phasendiagramm dargestellt, das in unserem Fall folgendermaßen verläuft:²⁾

- 1) Dies gilt, weil, wie wir im nächsten Abschnitt beweisen werden, im Falle der Existenz einer nicht-trivialen Lösung immer $f'(0) > n/s$ ist.
- 2) Vgl. E. Burmeister und A. R. Dobell, Mathematical Theories ..., a.a.O. S. 26



Darin ist die Bewegungsrichtung der Kapitalintensität durch Pfeile gekennzeichnet. Aus ihnen geht ganz klar hervor, daß x^* der einzige Wert ist, auf den sich x zubewegt, solange $\dot{x} \neq 0$ ist. x^* ist also global stabil.

Bisher haben wir gezeigt, daß ein (ökonomisch vernünftiges) langfristiges Gleichgewicht dann zustande kommt, wenn

$$s \cdot f(x) = n \cdot x$$

ist. Wir haben außerdem darauf hingewiesen, daß die Lage des Gleichgewichtswertes von der Form der Produktionsfunktion abhängig ist. Da die Form der Produktionsfunktion, wie wir wissen, ihrerseits von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig ist, gilt es also jetzt zu untersuchen, inwieweit die Höhe der Substitutionselastizität Existenz und Lage des Gleichgewichts mitbeeinflußt.

b) Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Existenz eines langfristigen Gleichgewichts

Einen ersten Anhaltspunkt zur Beantwortung der Frage nach den Bedingungen für die Existenz eines langfristigen Gleichgewichts kann uns die Abbildung 9 liefern, denn aus dem Schaubild wird schon unmittelbar klar, daß außer der trivialen Lösung $x = 0$ unter den gegebenen Bedingungen $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$ und $n = \text{const}$ nur dann ein zweiter Schnittpunkt zwischen der Kurve $s \cdot f(x)$ und der Geraden $n \cdot x$ zustande kommt, wenn die Steigung der Kurve $s \cdot f(x)$ im Ursprung größer ist als die Steigung der Geraden $n \cdot x$ und für $x \rightarrow \infty$ kleiner als die Geradensteigung ist. Nimmt man $0 < s < 1$ und $n > 0$ an, so muß deshalb, damit ein Gleichgewicht x^* überhaupt existiert, gelten:¹⁾

$$s \cdot f'(x) \Big|_{x=0} > n$$

$$\text{und} \quad s \cdot f'(x) \Big|_{x=\infty} < n \quad (4)$$

bzw. umgeformt:

$$0 < n/s < f'(0)$$

$$\text{und} \quad n/s > f'(\infty) \quad (4a)$$

Setzen wir nun für $y = f(x)$ eine der früher erörterten expliziten Produktionsfunktionen ein, so läßt sich unschwer feststellen, welche Wertebereiche σ annehmen darf, damit bei gegebenen anderen Größen ein langfristiges Gleichgewicht überhaupt existiert.

Gehen wir zunächst von der einfachsten expliziten neoklassischen Produktionsfunktion, der Cobb-Douglas-Funktion, aus.²⁾ Diese Funktion besitzt überall eine Substitutionselastizität von Eins. Da - wie eingangs schon nachgewiesen wurde - $f'(x) = f_K = \partial Y / \partial K$ ist, muß also jetzt untersucht werden, welche Werte $\partial Y / \partial K$ im Falle der Cobb-Douglas-Funktion

- 1) Ein exakter Beweis für diese Existenzbedingungen findet sich bei E. Burmeister und A. R. Dobell, *Mathematical Theories ...*, a.a.O. S. 25
- 2) Von dieser Funktion geht Swan in seinem Wachstumsmodell aus. Vgl. T. W. Swan, *Economic Growth ...*, a.a.O. S. 334. Dort beweist er auch, daß im Falle der Cobb-Douglas-Funktion ein Gleichgewicht für $n > 0$ und $0 < s < 1$ immer existiert (vgl. ebenda S. 336 f).

an der Stelle $K = 0$ und für $K \rightarrow \infty$ annimmt. Im Falle einer Cobb-Douglas-Funktion $Y = A \cdot K^\alpha \cdot N^{1-\alpha}$ ist

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \cdot \left(\frac{Y}{K}\right) = \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{N}{K}\right)^{1-\alpha}$$

Geht nun bei gegebenem N $K \rightarrow 0$ und damit auch $x = K/N \rightarrow 0$, so geht $f'(x) \rightarrow \infty$. Wandert umgekehrt bei gegebenem N $K \rightarrow \infty$ und damit auch $x \rightarrow \infty$, so geht $f'(x) \rightarrow 0$. Als Grenzwerte erhalten wir demnach

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{K \rightarrow 0} f'_K = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} f'_K = 0$$

Setzt man diese Grenzwerte in obige Existenzbedingungen (Gleichung (4)) ein, so erkennt man unschwer, daß im Falle der Cobb-Douglas-Funktion, also für $\sigma = 1$, bei beliebigen positiven Werten von n und s immer ein langfristiger Gleichgewichtswert für die Kapitalintensität im endlichen Bereich existiert.¹⁾

Nicht so eindeutig wie im Falle der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion sind die Aussagen, wenn man von einer CES-Funktion ausgeht. Das ist darauf zurückzuführen, daß unter bestimmten Umständen bei Unterstellung einer CES-Funktion auch mit nur einem Produktionsfaktor produziert werden kann bzw. in anderen Fällen die Faktoren Arbeit und Kapital nicht unbegrenzt substituierbar sind, sondern statt dessen zur Erzeugung einer bestimmten Produktmenge bestimmte Mindesteinsatzmengen beider Faktoren erforderlich sind.

Um die Existenzbedingungen für ein langfristiges Gleichgewicht im Falle der CES-Funktion exakt abzuleiten, gehen

1) Die Bedeutung dieser Grenzwerte für die Existenz eines Wachstumsgleichgewichts erkannte als erster Ken-Ichi Inada, der sie seither stets bei seinen Wachstumsanalysen voraussetzt, auch wenn er keine bestimmte Produktionsfunktion annimmt. Sie sind als die sog. Inada-Bedingungen in die Literatur eingegangen und werden heute üblicherweise in der Kurzform $f'(0) = \infty$ und $f'(\infty) = 0$ geschrieben. Vgl. K. I. Inada, On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization, in: The Review of Economic Studies, Vol. 30 (1963), S. 119 - 127, und E. Burmeister und A. R. Dobell, Mathematical Theories ..., a.a.O. S. 35

wir zunächst von der ACMS-Funktion

$$Y = \gamma [\sigma \cdot K^{-\varphi} + (1-\sigma) \cdot N^{-\varphi}]^{-1/\varphi}$$

aus.¹⁾ Darin ist $\varphi = \frac{1}{\sigma} - 1 \neq 0$ der Substitutionsparameter, $0 < \sigma < 1$ der konstante Verteilungsparameter und $\gamma > 0$ der in unserem Modell ohne technischen Fortschritt ebenfalls konstante Effizienzparameter. Da auch im Falle der CES-Funktion die Beziehung

$$f'(x) = f_K = \frac{\partial Y}{\partial K}$$

Gültigkeit besitzt, können wir auch hier wieder die Grenzwerte von $f'(x)$ für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$ dadurch auffinden, daß wir das Verhalten von $\partial Y / \partial K$ an der Stelle $K = 0$ und für $K \rightarrow \infty$ untersuchen.

Die Grenzproduktivität des Kapitals im Falle der ACMS-Funktion beträgt

$$f_K = \sigma \cdot \gamma^{-\varphi} \cdot \left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\varphi} = \frac{\sigma \cdot \gamma}{\left[\sigma + (1-\sigma) \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^{\varphi}\right]^{1+1/\varphi}}$$

Geht nun K gegen Null und Unendlich, so erhalten wir die Grenzwerte:

$$\lim_{K \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{K \rightarrow 0} f_K \quad \left| \begin{array}{ll} = \gamma \sigma^{-1/\varphi} & \text{für } \varphi > 0 \\ = \infty & \text{für } -1 < \varphi < 0 \end{array} \right.$$

und

$$\lim_{K \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} f_K \quad \left| \begin{array}{ll} = 0 & \text{für } \varphi > 0 \\ = \gamma \sigma^{-1/\varphi} & \text{für } -1 < \varphi < 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Setzen wir diese Ergebnisse in die Bedingungsgleichung für die Existenz eines langfristigen Gleichgewichts (4) ein, so

- 1) Die Existenzbedingungen für ein langfristiges Gleichgewicht im Fall der CES-Funktion hat zuerst J. Pitchford untersucht. (Vgl. J. D. Pitchford, Growth and the Elasticity of Factor Substitution, in: Economic Record, Vol. 36 (1960), S. 491 - 504) Pitchford verwendete dazu allerdings nicht die ACMS-Funktion, sondern die Version

$$Y = [\gamma \cdot K^{-\beta} + \mu \cdot N^{-\beta}]^{-1/\beta}$$

Er kommt dadurch jedoch nicht zu wesentlich anderen Ergebnissen, als sie sich bei Verwendung der ACMS-Funktion ergeben.

sehen wir, daß bei $\varrho > 0$ bzw. $\sigma < 1$ ein langfristiges Gleichgewicht nur dann existiert, wenn die Sparquote

$$s > \frac{n}{\gamma \sigma^{-1/\sigma}} \quad (7)$$

ist. Umgekehrt ergibt sich bei $-1 < \varrho < 0$ bzw. $\sigma > 1$ ein langfristiges Gleichgewicht nur dann, wenn die Sparquote

$$s < \frac{n}{\gamma \sigma^{-1/\sigma}} \quad (7a)$$

ist. Während Pitchford, der auf diese Existenzbedingungen zuerst hingewiesen hat, bei der Interpretation dieser Ergebnisse auf die Sparquote abstellt und den Schluß zieht, daß in dem Fall, in dem $\sigma > 1$ ist, durch eine Erhöhung der Sparquote s über den oben aufgezeigten Schwellenwert hinaus ein "imbalanced growth" induziert werden kann, in dem das Wachstum des Kapitalstocks und des Einkommens immer höher bleibt als im langfristigen Gleichgewicht¹⁾, wollen wir hier auf die Substitutionselastizität abstellen und den Schluß ziehen, daß bei gegebenen Werten für s , n , γ und σ ein steady-state-Wachstum nur dann möglich ist, wenn σ einen Wert besitzt, auf Grund dessen eine der beiden Existenzbedingungen erfüllt ist.

Die Abhängigkeit eines langfristigen Gleichgewichts von der Höhe der Substitutionselastizität erscheint jedoch dann wieder fragwürdig, wenn man bedenkt, daß der Effizienzparameter γ in der ACMS-Funktion nur die "totale Faktoreffizienz" beider Produktionsfaktoren erfaßt, während ein eventueller Unterschied zwischen den "partiellen" Faktoreffizienzen von Arbeit und Kapital sich in dieser Funktion in der Höhe von σ ausdrückt. Diese Vermutung wird durch die Ergebnisse bestätigt, die wir erhalten, wenn wir, um die "eigentliche" Effizienz der Faktoren Arbeit und Kapital zu berücksichtigen, von der CES-Funktion in der Version von David und van de Klundert ausgehen.

Bildet man von dieser Funktion die partielle Ableitung $\partial Y / \partial K$, so erhält man für

1) Vgl. J. D. Pitchford, Growth and the Elasticity of Factor Substitution, a.a.O. S. 499

$$f'(x) = f_K = A^{-\xi} \cdot \left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\xi} = \frac{A^{-\xi}}{\left[A^{-\xi} + B^{-\xi} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^{\xi}\right]^{1+1/\xi}}$$

Als Grenzwerte für $K \rightarrow 0$ bzw. $K \rightarrow \infty$ erhält man daraus:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{K \rightarrow 0} f_K & \left| \begin{aligned} &= A \quad \text{für } \xi > 0 \\ &= \infty \quad \text{für } -1 < \xi < 0 \end{aligned} \right. \\ \text{und} & & \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) &= \lim_{K \rightarrow \infty} f_K & \left| \begin{aligned} &= 0 \quad \text{für } \xi > 0 \\ &= A \quad \text{für } -1 < \xi < 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (8)$$

Setzen wir diese Ergebnisse wiederum in die oben abgeleiteten Existenzbedingungen (4) ein, so müssen wir feststellen, daß bei Annahme einer CES-Funktion, in der die "eigentliche" Faktoreffizienz von Arbeit und Kapital direkt erscheint, die Existenz eines steady-state-Wachstumspfadcs von der Höhe der Substitutionselastizität weitgehend unabhängig ist. Vielmehr ist die Existenz eines solchen Pfades praktisch ausschließlich von der Höhe der Effizienz des Faktors Kapital abhängig, und zwar ist ein steady-state-Wachstum bei $\xi > 0$ bzw. $\sigma < 1$ möglich, wenn

$$s > \frac{n}{A} \quad (9)$$

ist, und bei $-1 < \xi < 0$ bzw. $\sigma > 1$, wenn

$$s < \frac{n}{A} \quad (9a)$$

ist. Bei der Existenz eines langfristigen Gleichgewichts kommt es also jetzt nicht mehr darauf an, welchen numerischen Wert die Substitutionselastizität besitzt, sondern nur noch darauf, ob σ größer oder kleiner als Eins ist, da es davon abhängt, welche Existenzbedingung erfüllt sein muß.

Es ist nun allerdings weder auf Grund des mit der ACMS-Funktion gefundenen Ergebnisses noch auf Grund der mit der CES-Funktion von David und van de Klundert gefundenen Existenzbedingungen unmittelbar möglich, die ökonomische Relevanz des Falles abzuschätzen, daß bei gegebenen Parametern ein langfristiges Gleichgewicht nicht möglich ist, denn es

dürfte in der Praxis äußerst schwierig sein, empirisch zuverlässige Werte für γ , σ und σ bzw. für A zu finden. Um dennoch zu einem einigermaßen fundierten Urteil darüber zu gelangen, wie groß auf Grund der ökonomischen Gegebenheiten die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein langfristiges Gleichgewicht nicht erreichbar ist, hat Sato eine Umformung der Existenzbedingungen vorgeschlagen.¹⁾

Berücksichtigt man nämlich, daß im Falle der CES-Funktion die Profitquote je nachdem, von welchem Konzept der CES-Funktion man ausgeht, durch die Beziehungen

$$u = \sigma \cdot \left(\frac{Y}{\gamma \cdot K} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \quad \text{bzw.} \quad u = \left(\frac{Y}{AK} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

bestimmt wird, so kann man daraus für $\gamma \sigma^{-1/\sigma}$ bzw. A die ökonomisch besser abschätzbaren Ausdrücke

$$\gamma \sigma^{-1/\sigma} = \left(\frac{Y}{K} \right) \cdot u^{-1/\sigma} \quad \text{bzw.} \quad A = \left(\frac{Y}{K} \right) \cdot u^{-1/\sigma} \quad (10)$$

ableiten und in die Existenzbedingungen für ein langfristiges Gleichgewicht einsetzen. Man erhält dann für den Fall $\sigma < 1$

$$s > \frac{n}{\left(\frac{Y}{K} \right) \cdot u^{-1/\sigma}} \quad (11)$$

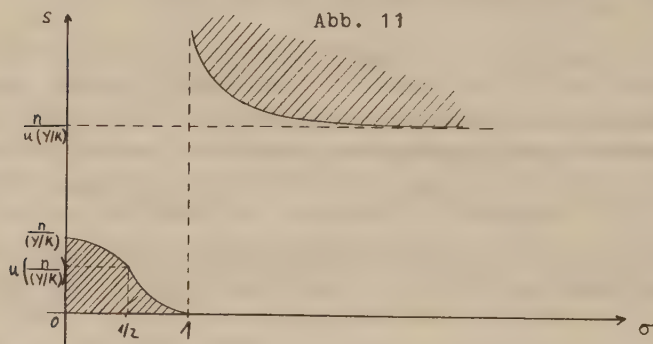
und für den Fall $\sigma > 1$

$$s < \frac{n}{\left(\frac{Y}{K} \right) \cdot u^{-1/\sigma}} \quad (11a)$$

Die in diesen beiden Bedingungen jetzt erscheinenden Größen sind bis auf $s = \frac{1}{\sigma} - 1$ direkt zu beobachten. Nimmt man nun an, daß von diesen Größen die Sparquote am leichtesten zu beeinflussen ist, so kann man eine Aussage darüber treffen, innerhalb welcher Grenzen s für alternative Werte von σ liegen muß, damit ein langfristiges Gleichgewicht zustande kommt. Diese Betrachtungsweise scheint dann nicht mehr nur berechtigt, sondern sogar notwendig zu sein, wenn man berücksichtigt, daß der Nenner in den Beziehungen (11)

1) Vgl. K. Sato, Growth and the Elasticity of Factor Substitution: A Comment. - How Plausible is Imbalanced Growth?, in: Economic Record, Vol. 39 (1963), S. 355 - 361

und (11a), selbst wenn sich der Kapitalkoeffizient K/Y und die Profitquote u verändern, solange konstant bleibt, als die Parameter der Produktionsfunktion sich nicht verändern.¹⁾ In diesem Fall heben sich nämlich Veränderungen von K/Y und u gerade gegenseitig auf. In der folgenden Abbildung, die von K. Sato stammt, sind alle möglichen s - σ -Kombinationen in einem Koordinatensystem für den Fall, daß $n = 0,02$, $u = 0,5$ und $K/Y = 2$ ist, dargestellt.²⁾



Die Existenz eines steady-state-Wachstumspfades ist nun in all den Fällen gesichert, in denen eine bestimmte s - σ -Kombination nicht im gestreiften Feld liegt, nicht dagegen, wenn eine solche Parameterkonstellation in den gestreiften Bereich fällt.

Sato schließt aus diesen Zusammenhängen, indem er einigermaßen realistische Werte für s , n , K/Y und σ einsetzt, daß die Wahrscheinlichkeit eines "imbalanced growth" bei $\sigma < 1$ möglicherweise etwas höher ist als wenn $\sigma > 1$ ist, daß dagegen insgesamt gesehen "imbalanced growth is not very plausible under ordinary circumstances."³⁾

Es sollte aber nicht übersehen werden, daß im Falle einer Konsummaximierung, in dem auf Grund der "Goldenen Regel der

1) Dieser Schluß ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen (10)

2) Vgl. K. Sato, Growth ..., a.a.O. S. 358

3) Siehe ebenda, S. 358 und S. 355

Kapitalakkumulation" $s = u$ ist,¹⁾ bei Abwesenheit von technischem Fortschritt und einem nur geringen Bevölkerungswachstum die Existenz eines langfristigen Gleichgewichts durchaus nicht gesichert erscheint, wie aus der Bedingung

$$\frac{n}{\left(\frac{Y}{K}\right) \cdot u^{1/(1-\sigma)}} \quad \left| \begin{array}{ll} > 1 & \text{für } \sigma < 1 \\ < 1 & \text{für } \sigma > 1 \end{array} \right. \quad (11b)$$

ersichtlich ist, die man erhält, wenn man die Existenzbedingungen (11) und (11a) durch $s = u$ dividiert. Trotzdem glaubt der Verfasser, sich der Meinung Satos anschließen und im weiteren davon ausgehen zu können, daß unter einigermaßen realistischen Bedingungen im Normalfall die Erreichung eines steady-state-Wachstums möglich ist, so daß wir nun zu der Frage übergehen können, wie die Höhe der Substitutionselastizität das Gleichgewicht selbst beeinflusst.

1) Zur "Goldenen Regel der Kapitalakkumulation" vgl. E. S. Phelps, The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, in: The American Economic Review, Vol. 51 (1961), S. 638 - 643; derselbe, Golden Rules of Economic Growth-Studies of Efficient and Optimal Investment, New York 1966; C. C. von Weizsäcker, Wachstum, Zins und optimale Investitionsquote, Basel, Tübingen 1962

c) Der Einfluß der Substitutionselastizität auf
die Lage des langfristigen Gleichgewichts

Geht man einmal von der - wie wir gesehen haben wohl berechtigten - Annahme aus, daß ein langfristiges Wachstumsgleichgewicht im Sinne eines steady-state-Wachstums existiert, so interessiert natürlich, welche Komponenten die Lage eines solchen Gleichgewichtspfades in welcher Weise bestimmen. Dies ist wieder eine jener Fragen, deren Beantwortung die Wachstumstheorie sich zum Ziele gesetzt hat, die aber in dieser allgemeinen Form den Rahmen unserer Abhandlung sprengen würde. Im Rahmen unserer Fragestellung soll nur der Einfluß einer der verschiedenen möglichen Komponenten, nämlich der Einfluß der Substitutionselastizität, auf das säkulare Wachstum genauer analysiert werden.¹⁾

Wie wir oben gesehen haben, ist ein steady-state-Wachstumspfad dadurch gekennzeichnet, daß die Kapitalintensität langfristig konstant ist. Da die Bevölkerung jedoch mit der Rate n wächst, muß deshalb - damit die Höhe der Kapitalintensität unverändert bleibt - auch der Kapitalstock mit der Rate $k = n$ wachsen. Diese konstante Wachstumsrate des Kapitalstocks ist bei einer konstanten Sparquote jedoch wiederum nur dann möglich, wenn $\dot{k} = k \cdot (y - k) = 0$ ist, d. h. wenn $y = k$ ist. In einem langfristigen Gleichgewicht wachsen demnach sowohl der Kapitalstock K als auch das Einkommen Y mit der exogen gegebenen Wachstumsrate der Bevölkerung n . Die langfristige Wachstumsrate einer Volkswirtschaft ist also

1) Mit dieser Frage hat sich - soweit dem Verfasser bekannt - bisher nur Ferguson befaßt (vgl. C. E. Ferguson, The Elasticity of Substitution and the Savings Ratio in the Neoclassical Theory of Growth, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 79 (1965), S. 465 - 471). Dort glaubt Ferguson nachweisen zu können, daß die "natürliche" Wachstumsrate des Sozialprodukts y bei $\sigma \neq 1$ von σ abhängig ist, und zwar ist y um so größer, je größer σ ist. Ist der Wert von σ jedoch kleiner als Eins, so nähert sich y allerdings langfristig dem konstanten Wert $a+n$, wobei a die Rate des Hicks-neutralen Fortschritts und n die Wachstumsrate der Arbeit bezeichnet. In diesem Fall geht jedoch die Profitquote gegen Null. Insgesamt wirkt die Untersuchung von Ferguson wenig überzeugend, vor allem deshalb, weil er zur Herleitung seiner Ergebnisse annimmt, daß bei Hicks-neutralem Fortschritt der Kapitalkoeffizient im langfristigen Gleichgewicht konstant ist.

unter neoklassischen Bedingungen sowohl von der Höhe der Sparquote als auch von der Form der Produktionsfunktion, insbesondere von der Höhe der Substitutionselastizität unabhängig.¹⁾

Nicht unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität ist jedoch die Höhe der sich im langfristigen Gleichgewicht einstellenden Kapitalintensität x . Um das zu zeigen, ersetzen wir in der früher abgeleiteten Gleichgewichtsbedingung für ein steady-state

$$s \cdot f(x) = n \cdot x \quad (12)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{n}{s} \quad (12a)$$

die noch völlig unspezifizierte Produktionsfunktion $y = f(x)$, in der $y = \frac{Y}{N}$ und $x = \frac{K}{N}$ ist,²⁾ durch eine CES-Funktion, in der σ explizit erscheint. Verwenden wir wieder die CES-Funktion in der Version von David und van de Klundert, so ist

$$y = \frac{Y}{N} = \left[\left(\frac{AK}{N} \right)^{-\sigma} + B^{-\sigma} \right]^{-1/\sigma}$$

und

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} = \left[A^{-\sigma} + B^{-\sigma} \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{\sigma} \right]^{-1/\sigma}$$

Setzt man diese Beziehung in die Gleichgewichtsbedingung (12) ein und löst nach $K/N = x$ auf, so erhält man die im steady state realisierte gleichgewichtige Kapitalintensität:

$$\left(\frac{K}{N} \right)^* = x^* = \left[\left(\frac{s \cdot B}{n} \right)^{\sigma} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\sigma} \right]^{1/\sigma} \quad (13)$$

-
- 1) Dies ist das berühmte neoklassische Theorem von der Unabhängigkeit der gleichgewichtigen Wachstumsrate von der Sparquote, wobei hier unter gleichgewichtig das langfristige Gleichgewicht im steady state verstanden wird. Tatsächlich ist die gleichgewichtige Wachstumsrate im steady state in allen Modellen der modernen Wachstumstheorie nicht nur von der Sparquote, sondern auch von der Form der unterstellten Produktionsfunktion unabhängig, so daß man mit dem gleichen Recht auch von einem "Theorem von der Unabhängigkeit der gleichgewichtigen Wachstumsrate von der Substitutionselastizität oder der Form der Produktionsfunktion" sprechen kann.
 - 2) Wir bezeichnen also im folgenden mit y nicht die Wachstumsrate des Sozialprodukts, sondern das Pro-Kopf-Einkommen. Für diese Verwendung eines Symbols für zwei verschiedene Begriffe haben wir uns entschieden, weil das Symbol y auch in der Literatur überwiegend in diesen beiden Bedeutungen verwendet wird.

Im Gegensatz zur Höhe der Wachstumsrate im steady state ist die dort eintretende Kapitalintensität x^* danach sowohl von der Höhe der Sparquote s als auch von der Form der Produktionsfunktion, insbesondere auch von σ , abhängig.

Um nun eine Aussage darüber treffen zu können, wie sich die gleichgewichtige Kapitalintensität x^* verändert, wenn man für σ alternative Werte unterstellt, bilden wir die Ableitung $\partial x^* / \partial \sigma$ und prüfen, ob diese positiv oder negativ ist. Es ist¹⁾

$$\frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = - \frac{x^{*1-\varphi}}{(1-\sigma)^2} \left[\left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} \cdot \log \left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} \cdot \log \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} - x^{*\varphi} \cdot \log x^{*\varphi} \right] \quad (14)$$

Ersetzt man in diesem Ausdruck $x^{*\varphi} \cdot \log x^{*\varphi}$ durch $\left[\left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} \right] \log x^{*\varphi}$, so erhält man nach geringfügigen Umformungen:

- 1) Die Ableitung $\partial x^* / \partial \sigma$ erhält man auf Grund der Kettenregel in folgender Weise:

$$\frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = \frac{dx^*}{d \log x^*} \cdot \frac{\partial \log x^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

wobei

$$\frac{dx^*}{d \log x^*} = \frac{1}{d \log x^* / dx^*} = x^* \text{ und } \frac{d\varphi}{d\sigma} = - \frac{1}{\sigma^2}$$

und schließlich

$$\frac{\partial \log x^*}{\partial \varphi} = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} \cdot \log \left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} \cdot \log \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi}}{\left[\left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} \right] - \frac{1}{\varphi^2} \cdot \log \left[\left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} \right]}$$

ist. Berücksichtigt man, daß wegen (13)

$$\left[\left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} \right] = x^{*\varphi} \text{ ist, so erhält man demnach für}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = - \frac{1}{\sigma^2} \cdot x^* \cdot \left[\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} \cdot \log \left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} - \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} \cdot \log \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi}}{x^{*\varphi}} - \frac{1}{\varphi^2} \cdot \log x^{*\varphi} \right]$$

Klammert man nun $\frac{1}{\varphi^2 x^{*\varphi}}$ aus und berücksichtigt, daß $\varphi \cdot \log \left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi} = \log \left(\frac{sB}{n} \right)^{\varphi^2}$ und $\varphi \cdot \log \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi} = \log \left(\frac{B}{A} \right)^{\varphi^2}$ sowie $\varphi = \frac{1-\sigma}{\sigma}$ ist, so erhält man schließlich Gleichung (14).

$$\frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = - \frac{x^{*1-\sigma}}{(1-\sigma)^2} \left\{ \left(\frac{sB}{n} \right)^\sigma \left[\log \left(\frac{sB}{n} \right)^\sigma - \log x^{*\sigma} \right] - \left(\frac{B}{A} \right)^\sigma \left[\log \left(\frac{B}{A} \right)^\sigma - \log x^{*\sigma} \right] \right\} \quad (14a)$$

Setzen wir nun voraus, daß die Bedingungen für die Existenz eines Gleichgewichtes (9) und (9a) erfüllt sind, daß also gilt

$$\text{für } \xi > 0 \text{ bzw. } \sigma < 1 \quad \frac{s}{n} > \frac{1}{A}$$

$$\text{und für } -1 < \xi < 0 \text{ bzw. } \sigma > 1 \quad \frac{s}{n} < \frac{1}{A}$$

so ist $x^* = \left[\left(\frac{sB}{n} \right)^\xi - \left(\frac{B}{A} \right)^\xi \right]^{1/\xi}$ für alle Werte von ξ bzw. σ immer positiv. Daraus folgt, daß für alle Werte von ξ bzw. σ immer gilt

$$\left(\frac{sB}{n} \right)^\xi - \left(\frac{B}{A} \right)^\xi > 0 \text{ bzw. } \left(\frac{sB}{n} \right)^\xi > \left(\frac{B}{A} \right)^\xi$$

Damit gilt aber auch für alle Werte von ξ bzw. σ

$$\log \left(\frac{sB}{n} \right)^\xi > \log \left(\frac{B}{A} \right)^\xi$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt nun aber unmittelbar, daß für alle Werte von σ

$$\left(\frac{sB}{n} \right)^\sigma \left[\log \left(\frac{sB}{n} \right)^\sigma - \log x^{*\sigma} \right] > \left(\frac{B}{A} \right)^\sigma \left[\log \left(\frac{B}{A} \right)^\sigma - \log x^{*\sigma} \right]$$

ist, bzw. daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer in Gleichung (14a), sofern ein Gleichgewichtswert x^* überhaupt existiert, immer positiv ist, so daß die Ableitung $\partial x^* / \partial \sigma$ insgesamt negativ ist, und zwar unabhängig davon, ob nun die Substitutionselastizität σ größer oder kleiner als Eins ist. Wir können also feststellen, daß die Höhe der gleichgewichtigen Kapitalintensität und damit die Lage des langfristigen Gleichgewichts von der Höhe der Substitutionselastizität nicht unabhängig ist. Vielmehr können wir aus der Ableitung (14a) erkennen, daß die gleichgewichtige Kapitalintensität ceteris paribus um so höher ist, je geringer die Substitutionselastizität ist, bzw. um so niedriger, je höher die Substitutionselastizität ist.

Damit ist die Auswirkung einer Veränderung der Substitutionselastizität auf das gleichgewichtige Wachstum mit der Auswirkung einer Änderung der Sparquote auf den Wachstumspfad vergleichbar.

Wie wir wissen, vermag eine Änderung der Sparquote zwar die gleichgewichtige Wachstumsrate nicht zu verändern, doch führt sie zu einer Niveauverschiebung des Wachstumspfades; und zwar liegt das Niveau des Wachstumspfades um so höher, je höher die Sparquote ist. Dieses oben durch die Graphik (Abb. 9) plausibel gemachte Ergebnis ergibt sich auch aus der Ableitung von Gleichung (13) nach s , denn wie sich leicht nachprüfen läßt ist¹⁾

$$\frac{\partial x^*}{\partial s} = \frac{1}{x^*} \cdot \left(\frac{B}{n}\right) \cdot s^{\epsilon-1} > 0$$

Danach ist die Kapitalintensität im langfristigen Gleichgewicht um so höher, je höher die Sparquote ist. Da andererseits

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\partial y^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial s} = f'(x^*) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial s} > 0$$

ist, erhöht sich das Pro-Kopf-Einkommen im Gleichgewicht y^* mit steigender Sparquote und ist konstant, wenn sich die Sparquote nicht verändert.

- 1) Für den allgemeinen Fall einer unspezifizierten Produktionsfunktion $y = f(x)$ erhält man die Ableitung $\partial x^*/\partial s$ aus der Gleichgewichtsbedingung (3)

$$s \cdot f(x) - n \cdot x = 0$$

deren Lösungswert x^* die Höhe der Kapitalintensität im langfristigen Gleichgewicht angibt. Leitet man diese Beziehung implizit ab, so erhält man

$$\frac{\partial x^*}{\partial s} = - \frac{f(x^*)}{s \cdot f'(x^*) - n}$$

Berücksichtigt man in dieser Beziehung, daß man wegen Gleichung (3) für n auch $n = s \cdot f(x^*)/x^*$ setzen kann, so ergibt sich aus

$$\frac{\partial x^*}{\partial s} = - \frac{f(x^*)}{s [f'(x^*) - \frac{f(x^*)}{x^*}]} = \frac{x^* \cdot f(x^*)}{s [f'(x^*) \cdot x^* - f(x^*)]}$$

unmittelbar, daß $\partial x^*/\partial s > 0$ ist, da der Lohnsatz $w = f(x) - x \cdot f'(x)$ immer positiv ist.

(Zur Technik der Ableitung impliziter Funktionen vgl. R. G. D. Allen, Mathematik ..., a.s.O. S. 347 ff)

Ebenso wie eine Änderung der Sparquote zwar nicht die gleichgewichtige Wachstumsrate selbst, aber doch das Niveau des Wachstumspfadcs zu beeinflussen vermag, verändert auch eine (exogene) Änderung der Substitutionselastizität zwar nicht die Höhe der gleichgewichtigen Wachstumsrate selbst, aber doch das Niveau des Wachstumspfadcs. Doch ist die Auswirkung einer Erhöhung der Substitutionselastizität auf das Niveau des Wachstumspfadcs genau umgekehrt wie bei einer Erhöhung der Sparquote. Während durch eine Erhöhung der Sparquote das Wachstumsniveau angehoben wird, fällt es bei einer Erhöhung der Substitutionselastizität ab.¹⁾ Das ergibt sich aus der Ableitung

$$\frac{\partial y^*}{\partial \sigma} = \frac{dy^*}{dx^*} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} < 0 \quad \text{wegen } f'(x) > 0$$

und $\frac{\partial x^*}{\partial \sigma} < 0$

Damit kann als Ergebnis dieser Analyse festgehalten werden, daß die Substitutionselastizität, obwohl sie die langfristige Wachstumsrate nicht zu beeinflussen vermag, dennoch einen Einfluß auf die Versorgung mit

1) Damit können wir die Ergebnisse von Murray Brown nicht bestätigen. M. Brown glaubte festgestellt zu haben, "that when it becomes easier to substitute capital for labour, the growth rate rises for a given increase in the factors of production" (siehe M. Brown, On the Theory and Measurement of Technological Change, Cambridge 1966, 2. Aufl. Cambridge 1968, S. 56 f). Dieses Ergebnis von Brown widerspricht dem unsrigen in doppelter Hinsicht. Erstens ist nach unseren Ergebnissen die Höhe der gleichgewichtigen Wachstumsrate von der Höhe der Substitutionselastizität unabhängig, und zweitens bewirkt eine Erhöhung der Substitutionselastizität nicht eine Erhöhung sondern eine Senkung des Niveaus des gleichgewichtigen Wachstumspfadcs. Bezüglich der Beeinflussung der Wachstumsrate durch die Substitutionselastizität scheint Brown allerdings die formalen Zusammenhänge zu weitgehend interpretiert zu haben, obwohl Heubes kürzlich nachweisen konnte, daß die Höhe der tatsächlichen Wachstumsrate (im Gegensatz zur gleichgewichtigen Wachstumsrate) tatsächlich von der Höhe der Substitutionselastizität nicht unabhängig ist (vgl. J. Heubes, Substitutionselastizität und Wachstumsrate des Outputs, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 187 (1973), S. 128 - 133).

Gütern in einem steady state ausübt. Denn ebenso wie die Höhe der Sparquote beeinflusst auch die Höhe der Substitutionselastizität über die Höhe der im steady state anzutreffenden gleichgewichtigen Kapitalintensität das Niveau des Wachstumspfad und damit das im steady state realisierte Pro-Kopf-Einkommensniveau und die Gesamthöhe des Volkseinkommens. Allerdings ist die Auswirkung einer Veränderung der Substitutionselastizität auf das Niveau des Wachstumspfad genau umgekehrt wie bei einer Veränderung der Sparquote.

Die Tatsache, daß das Niveau des langfristigen Gleichgewichts nicht ausschließlich von der Höhe der Sparquote determiniert wird, sondern auch von der Form der Produktionsfunktion, d. h. von der Höhe der Substitutionselastizität, beeinflusst wird, führt zu einigen Implikationen, die durchaus Beachtung verdienen.

Als erste Implikation ergibt sich aus diesem Ergebnis, daß mit einem (exogenen) Sinken der Sparquote durchaus nicht notwendigerweise ein Sinken des Wachstumspfad verbunden sein muß. Geht nämlich mit dem Abfall der Sparquote - aus welchen Gründen auch immer - gleichzeitig eine Verminderung der Substitutionsmöglichkeiten einher, so kann diese Verminderung der Höhe der Substitutionselastizität ein Sinken des Wachstumspfad teilweise oder ganz verhindern oder möglicherweise sogar überkompensieren. Theoretisch besteht auf jeden Fall die Möglichkeit, eine Änderung des Niveaus des gleichgewichtigen Wachstumspfad nicht nur durch eine Veränderung der Sparquote, sondern auch über eine Veränderung der Produktionsfunktion zu erreichen.¹⁾

Als zweite Implikation folgt aus unserem Ergebnis, daß

1) Daß die Form der Produktionsfunktion nicht ausschließlich technisch determiniert und damit exogen gegeben ist, sondern unter bestimmten Voraussetzungen durchaus durch menschliche Verhaltensweisen beeinflusst werden kann und auch beeinflusst wird, stellt eine der Thesen dieser Arbeit dar. Vgl. dazu insbesondere Kapitel V dieser Arbeit.

ein langfristig maximaler Konsum nicht nur über eine Veränderung der Sparquote erzielt werden kann, sondern prinzipiell auch durch Variation der Substitutionselastizität erreichbar ist. Dies wird sofort erkennbar, wenn man den Pro-Kopf-Konsum c maximiert. Der Pro-Kopf-Konsum ist nämlich im langfristigen Gleichgewicht

$$c = (1-s) \cdot f(x^*) = f(x^*) - s \cdot f(x^*)$$

Da im langfristigen Gleichgewicht aber gilt

$$s \cdot f(x^*) = nx^*$$

ist der Pro-Kopf-Konsum im steady state

$$c = f(x^*) - nx^*$$

Da aber x^* von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig ist, ist auch $c = c[x^*(\sigma)] = c(\sigma)$. Leitet man nun c nach σ ab, so erhält man für ein Konsummaximum die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{dc}{dx^*} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = f'(x^*) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} - n \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = 0$$

Ein Konsummaximum liegt demnach vor, wenn

$$[f'(x^*) - n] \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = 0$$

ist, bzw. da $\partial x^* / \partial \sigma$ immer negativ ist, wenn

$$f'(x^*) = n$$

ist.¹⁾

-
- 1) Das ist das bekannte Ergebnis der "Goldenen Regel". Vgl. etwa E. Burmeister und A. R. Dobell, Mathematical Theories ..., a.a.O. S. 49 ff

Strenggenommen kann man diese Aussage erst dann treffen, wenn man festgestellt hat, daß die zweite Ableitung $d^2c/d\sigma^2$ negativ ist. Wie sich jedoch leicht nachprüfen läßt, ist

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} \left[f''(x^*) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} \right] + \left[f'(x^*) - n \right] \frac{\partial^2 x^*}{\partial \sigma^2}$$

an der Stelle $f'(x^*) = n$ tatsächlich negativ, da einerseits $[f'(x^*) - n] \partial^2 x^* / \partial \sigma^2 = 0$ ist und andererseits sowohl $\partial x^* / \partial \sigma < 0$ als auch $f''(x^*) < 0$ ist.

Wir besitzen also zur Realisierung der "Goldenen Regel" in Wirklichkeit nicht nur wie wir bisher glaubten einen, sondern zwei Steuerungsparameter, die beide alternativ oder kombiniert zur Ansteuerung eines Konsummaximums zur Verfügung stehen. Welche der beiden Möglichkeiten dabei den praktikableren Weg darstellt, ist eine Frage, die so lange nicht eindeutig beantwortet werden kann als wir nicht mehr als heute über die Faktoren wissen, die die Höhe der Substitutionselastizität bestimmen und damit auch verändern können.

3. Wachstum bei technischem Fortschritt

a) Die Eigenschaften des langfristigen Gleichgewichts in einem Modell mit induziertem technischem Fortschritt

Gibt man die Annahme auf, daß ein technischer Fortschritt ausgeschlossen ist, so erfährt eine Analyse des wirtschaftlichen Wachstums insofern eine Erweiterung, als sich die Faktoren Arbeit und Kapital jetzt nicht mehr nur quantitativ verändern können, wie das durch die Rate des Bevölkerungswachstums n und die Wachstumsrate des Kapitalstocks k zum Ausdruck kommt, sondern daß sich auch die Effizienz der Produktionsfaktoren verändern kann. In einer Produktionsfunktion mit faktorerhöhendem technischem Fortschritt sind jetzt also auch Veränderungen der Effizienzparameter der Faktoren zugelassen.

Geht man davon aus, daß sich die Ursachen des technischen Fortschritts und damit auch dessen Höhe bisher der menschlichen Kenntnis entziehen, so ist es wohl naheliegend, die Höhe des technischen Fortschritts als autonom zu betrachten. Diese Annahme impliziert aber nicht notwendigerweise, daß auch die Richtung des technischen Fortschritts exogen determiniert sei. Der technische Fortschritt kann sich nämlich entweder mehr arbeitserhöhend oder mehr kapitalerhöhend auswirken und kann im Grenzfall sogar rein arbeitserhöhend oder rein kapitalerhöhend sein. Exogen begrenzt wird durch die Annahme, daß die Höhe des technischen Fortschritts als autonom betrachtet wird, nur die Gesamtwirkung des technischen Fortschritts, die sich aus der Erhöhung der Arbeitseffizienz und der Erhöhung der Kapitaleffizienz zusammensetzt. Es ist deshalb durchaus denkbar, daß die Richtung des technischen Fortschritts, obwohl seine Höhe selbst als exogen gegeben angenommen wird, nicht exogen gegeben ist, sondern auf Grund irgendwelcher ökonomischer Kalküle in ganz bestimmter Weise gelenkt wird.

Es kann nun gezeigt werden, daß die Richtung des technischen Fortschritts tatsächlich von ökonomischen Verhaltensweisen beeinflußt wird und unter bestimmten, nicht unrealistischen Bedingungen auf Grund ökonomischer Kalküle endogen determiniert ist.

Wenn wir nun im folgenden das gleichgewichtige Wachstum bei technischem Fortschritt eingehender untersuchen werden, ist es deshalb naheliegend, von einem Modell des richtungsinduzierten Fortschritts auszugehen und anhand eines solchen Modells die Bedeutung der Substitutionselastizität für das Gleichgewichtswachstum bei technischem Fortschritt herauszuarbeiten.

Ausgangspunkt des Modells mit richtungsinduziertem technischem Fortschritt ist die Vorstellung, daß die Höhe des technischen Fortschritts exogen gegeben ist. Nicht exogen determiniert ist dagegen die Richtung des technischen Fortschritts.¹⁾ Vielmehr kann sich der technische Fortschritt entweder mehr arbeitserhöhend oder mehr kapitalerhöhend auswirken und im Grenzfall sogar rein arbeits- bzw. kapitalerhöhend sein. Die maximal erreichbaren Zuwachsraten der Faktoreffizienz werden dabei jedoch durch eine Fortschrittsgrenze beschränkt, deren Lage exogen gegeben ist und von der angenommen wird, daß sie konkav zum

1) Zu diesem Modellansatz eines Gleichgewichtswachstums bei richtungsinduziertem technischem Fortschritt vgl. Ch. Kennedy, Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution, in: The Economic Journal, Vol. 74 (1964), S. 541 - 547; P. A. Samuelson, A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weizsäcker-Lines, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 343 ff; Ch. Kennedy, Samuelson on Induced Innovation, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 442 ff; P. A. Samuelson, Rejoinder, Agreements, Disagreements, Doubts, and the Case of Induced Harrod-Neutral Change, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 444 ff; E. M. Drandakis und E. S. Phelps, A Model of Induced Invention, Growth and Distribution, in: The Economic Journal, Vol. 76 (1966), S. 823 - 840

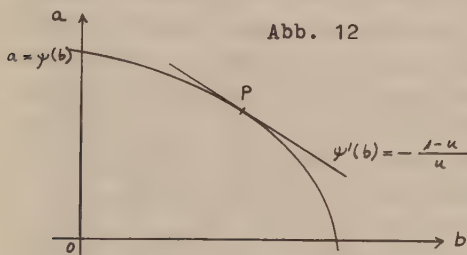
Ursprung verläuft.¹⁾ Bezeichnen wir den kapitalerhöhenden und arbeitserhöhenden Fortschritt mit a und b , so existiert also zwischen a und b eine Beziehung

$$a = \psi(b)$$

mit den Eigenschaften

$$\psi'(b) < 0, \quad \psi''(b) < 0, \quad \psi(0) > 0$$

Graphisch ist diese Funktion in Abbildung 12 dargestellt:



Diese Eigenschaften der Fortschrittsgrenze haben zur Folge, daß, von einem bestimmten Punkt der Fortschrittsgrenze ausgehend, die Effizienz eines Faktors nur dann erhöht werden kann, wenn die Zuwachsrates der Effizienz des anderen Faktors in steigendem Ausmaß vermindert wird. Welcher Punkt auf der Fortschrittsgrenze schließlich gewählt und realisiert wird, hängt von einem ökonomischen Maximierungskalkül ab, das von den Wirtschaftssubjekten als ökonomisch rational angesehen wird und deshalb auch verfolgt wird. Im folgenden wollen wir davon ausgehen, daß der technische Fortschritt so gewählt wird, daß die Wachstumsrate

1) Diese Konzeption stammt von Ch. Kennedy. Vgl. Ch. Kennedy, *Induced Bias ...*, a.a.O. Daß die Annahme einer solchen Fortschrittsgrenze nicht ganz unproblematisch ist, zeigen die Vorbehalte von Drandakis und Phelps (a.a.O. S. 838) sowie die kritischen Ausführungen von Ahmad (vgl. S. Ahmad, *On the Theory of Induced Invention*, in: *The Economic Journal*, Vol. 76 (1966), S. 344 - 357

des Sozialprodukts maximiert wird.¹⁾ Denkbar ist aber auch, daß statt der Maximierung der Wachstumsrate des Sozialprodukts die Stückkosten der Produktion minimiert werden oder die Wachstumsrate der Profitquote maximiert wird.²⁾ Doch führen all diese Verhaltensweisen, wie sich im Laufe der Diskussion gezeigt hat, zum gleichen Ergebnis, so daß wir nicht schon allein auf Grund unseres gewählten Maximierungskalküls ein bestimmtes Ergebnis präjudiziert haben. Das Sozialprodukt werde mit Hilfe von Arbeit und Kapital gemäß einer Produktionsfunktion erstellt, die als bekannt vorausgesetzt und von der unterstellt wird, daß ihre Substitutionselastizität im Zeitablauf konstant sei. Zur Vereinfachung können wir uns daher wieder der CES-Funktion bedienen, wobei wir aber nicht übersehen dürfen, daß das folgende Modell seine Gültigkeit auch bei einer mit der Kapitalintensität variierenden Substitutionselastizität behält, solange σ von der Zeit unabhängig ist.

Verwenden wir wieder die CES-Produktionsfunktion in der Version von David und van de Klundert, so beträgt die Wachstumsrate des Sozialprodukts:

$$y = u \cdot (a+k) + (1-u) \cdot (b+n) \quad (15)$$

Darin ist u die partielle Produktionselastizität des Kapitals bzw. unter der Annahme, daß die Faktoren nach ihren Grenzproduktivitäten entlohnt werden, die Profit-

- 1) Damit folgen wir M. Neumann. Vgl. M. Neumann, Induzierter technischer Fortschritt und das Verhältnis zwischen postkeynesianischer und neoklassischer Wachstums- und Verteilungstheorie, in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 102 (1969), S. 29 - 59
- 2) Drandakis und Phelps gehen in ihrem Modell von der Maximierung der Wachstumsrate der Profitquote aus (vgl. E. M. Drandakis und E. S. Phelps, a.a.O. S. 826 f); ihnen folgt W. Vogt (vgl. W. Vogt, Theorie des wirtschaftlichen Wachstums, Berlin, Frankfurt 1968, S. 64). Die Minimierung der Stückkosten dagegen findet sich bei M. Neumann, Kapitalbildung ..., a.a.O. S. 33 ff.

quote. Analog ist $(1-u)$ die partielle Produktionselastizität der Arbeit bzw. die Lohnquote. Betrachtet man nun die Profitquote als exogen gegeben, so ist die Wachstumsrate des Sozialprodukts bei Existenz einer Fortschrittsgränze $a = \psi(b)$ mit $\psi'(b) < 0$ und gegebenem k und n dann ein Maximum, wenn gilt

$$\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \{ u \cdot [\psi(b) + k] + (1-u) \cdot (b+n) \} = 0$$

Dies ist der Fall, wenn

$$- \psi'(b) = \frac{1-u}{u}$$

ist. Soll unter den gegebenen Bedingungen nun die Wachstumsrate des Sozialprodukts maximiert werden, so wird demnach das Ausmaß der Effizienzerhöhung von Arbeit und Kapital durch die Profitquote bzw. durch die Verteilungsrelation eindeutig determiniert. Allerdings wissen wir aus dem vorigen Kapitel, daß die Einkommensverteilung ihrerseits außer von der Veränderung der Kapitalintensität selbst wieder vom technischen Fortschritt abhängig ist. Das obige Gleichgewicht, das sich auf Grund der Maximierung der Wachstumsrate des Sozialprodukts zunächst einstellt, kann deshalb auf die Dauer keinen Bestand haben, sondern kann nur ein momentanes Gleichgewicht sein. Da, wie wir im letzten Kapitel gezeigt haben, für die Verteilungsrelation $(1-u)/u$ gilt (vgl. Gleichung III,5)

$$\frac{1-u}{u} = \left[\frac{AK}{BN} \right]^{\frac{1}{\sigma}-1} \quad (\text{III,5})$$

verändert sich die Profitquote im Laufe der Zeit und damit auch a und b entsprechend der sich aus (III,5) ergebenden Differentialgleichung

$$\dot{u} = u \cdot (1-u) \cdot \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \cdot (b-a+n-k)$$

solange, wie sich die Wachstumsraten a , b , k und n nicht gerade gegenseitig kompensieren. Berücksichtigt man außerdem noch, daß die Wachstumsrate des Kapitalstocks in einer gleichgewichtigen Wirtschaft

$$k = \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} = \frac{I}{K} = \frac{s \cdot Y}{K} \quad (16)$$

ist und sich deshalb bei einer gegebenen konstanten Sparquote s entsprechend der Differentialgleichung

$$\dot{k} = k \cdot (y - k) \quad (16a)$$

verändert, so ist klar, daß in einem langfristigen Wachstumsgleichgewicht, in dem alle Variablen mit einer konstanten Rate wachsen und in dem alle Anpassungsprozesse abgeschlossen sind, so daß sich das gesamte System in einer Ruhelage befindet, gleichzeitig $\dot{k} = 0$ und $\dot{u} = 0$ sein muß. Berücksichtigt man in der Differentialgleichung (16a) die Beziehung (15), wonach die Wachstumsrate des Sozialprodukts von a , b und u abhängig ist, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem aus zwei autonomen nichtlinearen Differentialgleichungen in k und u :

$$\begin{aligned} \dot{k} &= k[u \cdot (a+k) + (1-u) \cdot (b+n) - k] \\ \dot{u} &= u \cdot (1-u) \cdot \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \cdot (b-a+n-k) \end{aligned} \quad (17)$$

dessen Lösung die Werte für $a = \gamma(b)$ und k angibt, die realisiert sein müssen, damit sich die Wirtschaft in einem langfristigen Gleichgewichtszustand befindet und keine endogenen Tendenzen zu einer Änderung dieses Zustandes mehr zeigt.

Die Lösung dieses Systems erhält man, wenn man $\dot{k} = 0$ und $\dot{u} = 0$ setzt. Ist $\dot{u} = 0$, so muß wegen $0 < u < 1$ und $\sigma \neq 1$ $b-a+n-k = 0$ sein oder $k = n+b-a$. Setzt man für k diesen Ausdruck in die erste Gleichung des Systems (17) ein, so sieht man, daß $\dot{k}$ nur dann Null ist, wenn $a = 0$ und $k = n+b$ ist. Eine langfristige Ruhelage herrscht demnach nur dann, wenn der technische Fortschritt rein arbeitserhöhend wirkt bzw. Harrod-neutral ist und der Kapitalstock mit der "natürlichen" Wachstumsrate $k = n+b$ wächst. Die Wachstumsrate im goldenen age ist also wie im vorhergehenden Modell ohne technischen Fortschritt sowohl von der Höhe der Sparquote

als auch von der Form der Produktionsfunktion unabhängig. Insoweit erfahren die mit Hilfe des einfachen neoklassischen Wachstumsmodells gefundenen Ergebnisse durch die Einführung eines technischen Fortschritts keine Veränderung.

Eine Veränderung erfahren allerdings die Ergebnisse bezüglich der Kapitalintensität. Während sich in dem einfachen Modell ohne technischen Fortschritt für die Kapitalintensität ein Gleichgewichtswert x^* ergab, der sich im Laufe der Zeit nicht veränderte, erhöht sich nun die Kapitalintensität im Zeitablauf mit der Rate $b > 0$, wie sich unschwer aus der Beziehung

$$\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^* = k^* - n = b > 0$$

ergibt, wenn man für k^* die "natürliche" Wachstumsrate $n+b$ einsetzt. Die Höhe der Kapitalintensität selbst ist nach wie vor von der Höhe der Sparquote und der Höhe der Substitutionselastizität abhängig, wie die folgende Beziehung zeigt:¹⁾

$$\left(\frac{K}{N}\right)^* = x^* = \left[\left(\frac{s \cdot B_o e^{bt}}{n+b} \right)^{\frac{1}{\sigma}} - \left(\frac{B_o}{A_o} e^{bt} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right] \quad (18)$$

Und zwar ist, wie sich durch Ableitung von x^* nach s und σ unschwer nachprüfen läßt, die Kapitalintensität im langfristigen Gleichgewicht um so größer, je höher die Sparquote ist, und um so niedriger, je höher die Substitutionselastizität ist.²⁾

Anders als die Kapitalintensität x^* ist der Kapital-

- 1) Diese Beziehung erhält man, wenn man in der Relation $x^* = (K/N)^*$ N durch die Beziehung

$$N = \left[(Y/B)^{-\frac{1}{\sigma}} - (AK/B)^{-\frac{1}{\sigma}} \right]^{-1/\sigma}$$

ersetzt. Berücksichtigt man nun, daß $A = A_o e^{at}$, $B = B_o e^{bt}$, $Y = K/s$ und schließlich $\dot{K}/K = k^*$ ist und daß im langfristigen Gleichgewicht $a = 0$ und $k = n+b$ ist, so folgt Gleichung (18).

- 2) Die Ableitung $\partial x^* / \partial \sigma$ ergibt sich dabei analog zu dem bereits dargestellten Verfahren.

koeffizient im langfristigen Gleichgewicht $(K/Y)^*$ im Zeitablauf konstant. Seine Höhe wird durch die Beziehung

$$(K/Y)^* = \frac{s}{k^*} = \frac{s}{n+b}$$

bestimmt. Ebenfalls im Zeitablauf konstant ist der Zinssatz, dessen Höhe gegeben ist durch

$$r = A^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{Y}{K} \right)^{1+\frac{1}{\sigma}} = A^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{n+b}{s} \right)^{1+\frac{1}{\sigma}} = \text{const, da } a = 0$$

Schließlich ist die Tatsache, daß im langfristigen Gleichgewicht der technische Fortschritt Harrod-neutral ist und der Kapitalstock mit der "natürlichen" Wachstumsrate $n+b$ wächst, für die Einkommensverteilung in einem langfristigen Gleichgewicht von großer Bedeutung. Denn wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, ist die Einkommensverteilung konstant, wenn $b-a+n-k = 0$ ist (vgl. Gleichung (III,10)).¹⁾ Dies ist in dem oben abgeleiteten Wachstumsgleichgewicht nun tatsächlich der Fall. In ihm sind daher nicht nur alle Wachstumsraten und die Höhe des Kapitalkoeffizienten, sondern auch die funktionale Einkommensverteilung konstant. Ist nämlich die langfristige Ruhelage erreicht, so beträgt die Verteilungsrelation

$$\frac{1-u}{u} = -\psi'(b)_{a=0}$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich, daß die Einkommensverteilung nicht nur konstant, sondern auch unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität ist. Außerdem ist die Einkommensverteilung von der Sparquote unabhängig. Sie wird ausschließlich von dem exogen gegebenen Verlauf der Fortschrittsgrenze determiniert. Eine Beeinflussung der Verteilungsrelation ist daher nicht möglich.

Damit besitzen wir einen zweiten, alternativen Erklärungsansatz für die empirische Beobachtung, daß die

1) Diese Tatsache ergibt sich auch unmittelbar aus der zweiten Gleichung des Systems (17).

funktionale Einkommensverteilung langfristig (relativ) konstant ist. Folgt man diesem Modell, so übt danach die Substitutionselastizität - entgegen all unseren früheren Ergebnissen - keinerlei Einfluß auf die Höhe der sich langfristig einstellenden Verteilungsrelation aus. Das würde bedeuten, daß unter den unterstellten Modellannahmen die Einkommensverteilung im langfristigen Gleichgewicht von der Form der Produktionsfunktion unabhängig ist.

Vergleicht man diese Aussage mit dem völlig entgegengesetzten Ergebnis aus dem vorigen Kapitel, wonach die Höhe der Verteilungsrelation unter bestimmten Voraussetzungen ausschließlich von der Höhe der Substitutionselastizität determiniert wird, so kann dieser unüberbrückbare Widerspruch nur auf die in beiden Modellen unterschiedlichen Annahmen zurückgeführt werden. Da wir in unserem Modell am Ende des letzten Kapitels neben der Höhe des technischen Fortschritts auch dessen Richtung als exogen gegeben angenommen hatten und das dort gewonnene Ergebnis unabhängig davon ist, ob der technische Fortschritt Harrod-neutral ist oder nicht, kann die unterschiedliche Aussage beider Modellansätze nur darauf zurückgeführt werden, daß im einen Modell die Sparquote als exogen gegeben und konstant angenommen wurde, während sie im anderen Modell als eine endogene Größe betrachtet wurde, die nicht unbedingt konstant zu sein braucht. Welchem der beiden Erklärungsansätze der Vorzug gegeben werden sollte, ist eine Frage, die sich letztlich nur auf empirischem Wege entscheiden läßt.

Eine empirische Überprüfung des Modells mit induziertem technischem Fortschritt ist jedoch überhaupt nur dann sinnvoll, wenn das langfristige Gleichgewicht stabil ist. Diesem Punkt wollen wir uns im folgenden zuwenden.

b) Die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Stabilität des langfristigen Gleichgewichts bei induziertem technischem Fortschritt

Im Verlauf unserer bisherigen Untersuchung der Bedeutung der Substitutionselastizität für das Gleichgewichtswachstum haben wir festgestellt, daß in einem neoklassischen Ein-Sektor-Wachstumsmodell ohne technischen Fortschritt ein langfristiges Gleichgewicht, sofern es überhaupt existiert, immer stabil ist. Dies ist in einem Wachstumsmodell mit technischem Fortschritt nicht mehr der Fall. Vielmehr ist in einem Wachstumsmodell mit technischem Fortschritt unter bestimmten Voraussetzungen die Stabilität des langfristigen Gleichgewichts von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig. So kann gezeigt werden, daß in unserem oben dargestellten Modell mit induziertem technischem Fortschritt das langfristige Gleichgewicht nur dann stabil ist, wenn die Substitutionselastizität kleiner als Eins ist. Ist die Substitutionselastizität dagegen größer als Eins, so ist das oben abgeleitete langfristige Gleichgewicht mit Harrod-neutralem technischem Fortschritt instabil. Allerdings kann in einem Wachstumsmodell mit induziertem technischem Fortschritt eine globale Stabilität des langfristigen Harrod-Gleichgewichts auch unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität nachgewiesen werden, sofern man die technische Fortschrittsgrenze in geeigneter Weise uminterpretiert.

Um dies zu beweisen, soll im folgenden die Stabilität des Gleichungssystems (17) eingehend untersucht werden.¹⁾ Da es sich bei den vorliegenden Gleichungen wie in unserem ersten Modell um nichtlineare Differentialgleichungen handelt, be-

1) Die folgende Stabilitätsuntersuchung folgt im wesentlichen M. Neumann. Vgl. M. Neumann, Induzierter technischer Fortschritt ..., a.a.O. S. 38 ff. In etwas allgemeinerer Form wurden die Stabilitätsbedingungen dieses Modells auch von Drandakis und Phelps abgeleitet. Vgl. E. M. Drandakis und E. S. Phelps, A Model ..., a.a.O. S. 832 ff

dienen wir uns zur Überprüfung der Stabilität wieder der indirekten Methode von Ljapunow. Wir ersetzen also wieder die nichtlinearen Differentialgleichungen durch eine lineare Approximation und untersuchen dann das sich so ergebende lineare Gleichungssystem auf seine Stabilität. Vom Verhalten des linearen Näherungssystems schließen wir dann auf das Verhalten des nichtlinearen Systems und können auf diese Weise eine Aussage darüber treffen, ob das ursprüngliche nichtlineare Gleichungssystem lokal stabil ist oder nicht.

Bezeichnen wir analog zu oben mit h_1 und h_2 wieder einen beliebigen Abstand zu den Gleichgewichtswerten k^* und u^* , so können wir die nichtlinearen Differentialgleichungen $\dot{k} = F_1(k, u)$ und $\dot{u} = F_2(k, u)$ auch in der Form

$$F_1(k, u) = F_1(k^* + h_1, u^* + h_2)$$

und $F_2(k, u) = F_2(k^* + h_1, u^* + h_2)$

schreiben. Zerlegen wir nun die Funktionen $F_1()$ und $F_2()$ in Taylor-Reihen und wählen den Abstand h_1 und h_2 so klein, daß man alle Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen kann, so erhalten wir für das nichtlineare System (15) folgende lineare Approximation

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= F_1(k^*, u^*) + \frac{\partial F_1^*}{\partial h_1} \cdot h_1 + \frac{\partial F_1^*}{\partial h_2} \cdot h_2 \\ \dot{h}_2 &= F_2(k^*, u^*) + \frac{\partial F_2^*}{\partial h_1} \cdot h_1 + \frac{\partial F_2^*}{\partial h_2} \cdot h_2 \end{aligned} \quad (19)$$

in der $\partial F_i^* / \partial h_j$ ($i, j = 1, 2$) die partielle Ableitung von F_i an der Stelle k^*, u^* nach h_j bedeutet. Ersetzt man die Terme $\partial F_i^* / \partial h_j$ durch f_{ij} und berücksichtigt, daß $F_i(k^*, u^*) = 0$ ist, so kommt man schließlich zu folgendem System linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Die sogenannte Jacobische Matrix

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (21)$$

dieses Gleichungssystems wird auch als Ljapunowsche Matrix der ersten Näherung bezeichnet.¹⁾ Ausschlaggebend für die Stabilität dieses Gleichungssystems sind nun die Wurzeln der charakteristischen Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

die sich als Lösung des Gleichungssystems (20) ergeben. Diese Wurzeln werden auch als Eigenwerte der Matrix J bezeichnet. Das Gleichungssystem ist nun stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix J negativ sind oder negative Realteile besitzen.²⁾ Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Spur der Matrix $\text{sp } J$ negativ und die Determinante der Matrix $\det J$ positiv ist.³⁾ Ist dies nicht der Fall, so ist das Gleichungssystem instabil.

Um eine Aussage über die Stabilität unseres Modells treffen zu können, müssen wir also die Vorzeichen der partiellen Ableitungen für die Ruhelage f_{ij} überprüfen. Die partiellen Ableitungen im langfristigen Gleichgewicht lauten:

$$1. f_{11} = \frac{\partial F_1^*}{\partial h_1} = \frac{\partial F_1^*}{\partial k} = -k \cdot (1-u) < 0, \text{ da } 0 < u < 1 \quad (23)$$

$$2. f_{12} = \frac{\partial F_1^*}{\partial u} = k \cdot \left[u \cdot \frac{da}{du} + (1-u) \cdot \frac{db}{du} \right]$$

oder umgeformt:

$$f_{12} = k \cdot u \cdot \frac{db}{du} \cdot \left[\frac{da}{du} \cdot \frac{du}{db} + \frac{1-u}{u} \right] = k \cdot u \cdot \frac{db}{du} \cdot \left[\frac{da}{db} + \frac{1-u}{u} \right] \quad (24)$$

1) Vgl. A. G. J. MacFarlane, Analyse ..., a.a.O. S. 198

2) Vgl. ebenda, S. 274 ff

3) Vgl. M. Neumann, Theoretische Volkswirtschaftslehre, a.a.O. S. 185 und S. 187
Unter "Spur der Matrix $\text{sp } J$ " versteht man dabei die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen der Matrix J.
Vgl. M. Neumann, ebenda S. 185

Berücksichtigt man in diesem Ausdruck, daß in jedem momentanen Gleichgewicht und deshalb auch in der langfristigen Ruhelage gilt

$$\frac{da}{db} = \psi'(b) = -\frac{1-u}{u} \quad (25)$$

so ist unmittelbar zu erkennen, daß $f_{12} = 0$ ist.

$$3. f_{21} = \frac{\partial F_2^*}{\partial k} = -u \cdot (1-u) \cdot \left(\frac{1-\sigma}{\sigma} \right) \quad \left| \begin{array}{l} < 0 \text{ für } \sigma < 1 \\ > 0 \text{ für } \sigma > 1 \end{array} \right. \quad (26)$$

$$4. f_{22} = \frac{\partial F_2^*}{\partial u} = \left(\frac{1-\sigma}{\sigma} \right) \cdot u \cdot (1-u) \cdot \left(\frac{db}{du} - \frac{da}{du} \right) \quad (27)$$

Das Vorzeichen von f_{22} hängt demnach außer von σ von der Differenz $\frac{db}{du} - \frac{da}{du}$ ab. Man kann sich nun auf Grund der Beziehung $-da/db = (1-u)/u$ leicht klarmachen, daß a im Verhältnis zu b um so höher ist, je höher die Profitquote u ist, daß also $da/du > 0$ und $db/du < 0$ ist. Dies läßt sich exakt beweisen, indem man die Funktion (25) implizit nach u ableitet. Man erhält

$$\frac{d[\psi'(b)]}{db} \cdot \frac{db}{du} = \frac{1}{u^2}$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{db}{du} = \frac{1}{u^2 \cdot \psi''(b)} < 0 \quad \text{da } \psi''(b) < 0$$

und deshalb wegen

$$\frac{da}{db} = \frac{da}{du} \cdot \frac{du}{db} = \psi'(b)$$

die Beziehung

$$\frac{da}{du} = \psi'(b) \cdot \frac{db}{du} = -\frac{1-u}{u} \cdot \frac{db}{du} > 0$$

Berücksichtigt man diese Beziehungen, so ist

$$f_{22} \quad \left| \begin{array}{l} < 0 \text{ für } \sigma < 1 \\ > 0 \text{ für } \sigma > 1 \end{array} \right.$$

Aus diesen Ableitungen lassen sich die Wurzeln λ unschwer errechnen. Da $f_{12} = 0$ ist, ergibt sich aus (22) die charakteristische Determinantengleichung

$$(f_{11} - \lambda) \cdot (f_{22} - \lambda) = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = f_{11}$ und $\lambda_2 = f_{22}$. Wie die partiellen Ableitungen f_{11} und f_{22} zeigen, sind beide Wurzeln negativ, sofern $\sigma < 1$ ist. Ist dagegen $\sigma > 1$, so ist $f_{22} > 0$. Das Gleichungssystem ist also stabil, wenn die Substitutionselastizität kleiner als Eins ist, und instabil, falls die Substitutionselastizität größer als Eins ist. Dieses Ergebnis wird auch dadurch bestätigt, daß

$$\begin{array}{l|l} \text{sp } J = f_{11} + f_{22} & \begin{array}{l} < 0 \text{ für } \sigma < 1 \\ \geq 0 \text{ für } \sigma > 1 \end{array} \\ \text{und } \det J = f_{11} \cdot f_{22} & \begin{array}{l} > 0 \text{ für } \sigma < 1 \\ < 0 \text{ für } \sigma > 1 \end{array} \end{array}$$

ist. Die Stabilitätsbedingungen $\text{sp } J < 0$ und $\det J > 0$ sind danach nur erfüllt, wenn $\sigma < 1$ ist.

Man findet also das Ergebnis, daß das Näherungssystem (20) nur stabil ist, wenn $\sigma < 1$ ist. Für $\sigma > 1$ ist es dagegen instabil. Damit ist die Bedingung $\sigma < 1$ auch hinreichend für die lokale Stabilität des ursprünglichen Gleichungssystems (15).

Um auch eine Aussage über die globale Stabilität unseres Modells treffen zu können, wenden wir ein Theorem von Czeslaw Olech an, nach dem ein System global stabil ist, wenn entweder $f_{11} \cdot f_{22} \neq 0$ oder $f_{12} \cdot f_{21} \neq 0$ ist.¹⁾ Da in unserem Fall tatsächlich $f_{11} \cdot f_{22} \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem (15) auch global stabil.²⁾

Versucht man, dieses Ergebnis aus ökonomischer Sicht zu interpretieren, so müßte man daraus folgern, daß in dem durch (15) beschriebenen Wachstumsmodell ein langfristiges steady-state-Wachstum nicht nur existiert, sondern aus jeder beliebigen Ausgangssituation auch tatsächlich ange-

1) Vgl. M. Neumann, Theoretische Volkswirtschaftslehre, a.a.O. S. 187, und die dort angegebene Literatur

2) Die globale Stabilität dieses Systems ergibt sich auch aus dem Verlauf der Phasenlinien $k = F_1(k, u) = 0$ und $u = F_2(k, u) = 0$, da es insgesamt nur einen Schnittpunkt² gibt und keine Grenzzyklen auftreten. Vgl. E. M. Drandakis und E. S. Phelps, A Model ..., a.a.O. S. 833, und E. Burmeister und A. R. Dobell, Mathematical Theories ..., a.a.O. S. 86 f

steuert wird, sofern die Substitutionselastizität kleiner als Eins ist. Durch dieses Modell erfährt unser früher gewonnenes Ergebnis, daß die ökonomischen Variablen in einem golden age von der Substitutionselastizität unabhängig sind, eine weitere Erhärtung, allerdings wäre nach diesem Modell für das Erreichen eines solchen langfristigen Gleichgewichts die Höhe der Substitutionselastizität sogar von ausschlaggebender Bedeutung. Damit würde sich durch die Einführung eines technischen Fortschritts bezüglich der Stabilität des langfristigen Wachstumsgleichgewichts ein wesentlicher Unterschied gegenüber der bisherigen Kenntnis ergeben, denn während im einfachen neoklassischen Wachstumsmodell die Stabilität unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität immer gewährleistet war, ist sie jetzt davon abhängig, ob σ größer oder kleiner als Eins ist.

Es läßt sich nun allerdings zeigen, daß die Einschränkung bezüglich der Stabilität des langfristigen Gleichgewichts, die sich aus diesem Modell ergibt, von der Interpretation der technischen Fortschrittsgrenze abhängt.¹⁾ Faßt man unter dem Begriff "technischer Fortschritt" all jene Faktoren zusammen, die eine Outputerhöhung bewirken, ohne daß sich die Faktoreinsatzmengen verändert haben, so gibt es nämlich verschiedene Möglichkeiten, diese Erhöhung der totalen Faktorproduktivität auf die Effizienzerhöhung der einzelnen Faktoren zurückzuführen. Die Bedingungen für die Stabilität des obigen Wachstumsmodells hängen nun davon ab, welche der verschiedenen Möglichkeiten in der technischen Fortschrittsgrenze zum Ausdruck gebracht werden. Verwendet man zur Aufteilung der Erhöhung der totalen Faktorproduktivität auf die Effizienzerhöhung der einzelnen Faktoren das augmenting-Konzept von David und van de Klundert, so ist, wie wir gesehen haben, das Wachstumsgleichgewicht

1) Diese Abhängigkeit der Stabilität von Wachstumsmodellen mit induziertem technischem Fortschritt von der Interpretation der technischen Fortschrittsgrenze wurde zuerst von W. Chang nachgewiesen.
Vgl. W. W. Chang, A Model of Economic Growth with Induced Bias in Technical Progress, in: The Review of Economic Studies, Vol. 39 (1972), S. 205 - 212.

nur stabil, wenn $\sigma < 1$ ist. Verwendet man dagegen eine Aufteilungsmöglichkeit, die mehr dem Fortschrittskonzept von Harrod entspricht, so läßt sich zeigen, daß das durch das Gleichungssystem (15) beschriebene Wachstumsmodell unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität immer stabil ist.¹⁾

Bevor wir dies zeigen können, ist es aber zunächst erforderlich, die verschiedenen Fortschrittskonzepte vorzustellen und ihre gegenseitigen Beziehungen aufzuzeigen.

1) Vgl. W. W. Chang, A Model..., a.a.O. S. 209 ff

- c) Die technische Fortschrittsgrenze im Lichte verschiedener Fortschrittskonzepte¹⁾

Versteht man unter technischem Fortschritt all jene Faktoren, die eine Outputerhöhung bewirken, ohne daß sich die Faktoreinsatzmengen verändert haben, so kann er, wenn man annimmt, daß er nicht faktorgebunden, sondern factor-disembodied ist, in der Produktionsfunktion durch einen Zeitterm t erfaßt werden. Die Produktionsfunktion lautet in diesem Fall ganz allgemein

$$Y = F(K, N, t) \quad (28)$$

Bildet man von dieser Funktion das totale Differential und dividiert die ganze Gleichung durch dt und Y , so erhält man als Veränderungsrate des Sozialprodukts

$$y = u \cdot k + (1-u) \cdot n + \pi \quad (29)$$

In dieser Beziehung gibt $\pi = \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t}$ den Teil der Wachstumsrate von Y an, der nicht auf eine Veränderung von K und N zurückzuführen ist und der deshalb auf Grund unserer obigen Definition technischen Fortschritt darstellt.

Definiert man nun die Veränderungsrate der durchschnittlichen Kapitalproduktivität als $e_K \equiv y - k$ und jene der durchschnittlichen Arbeitsproduktivität als $e_N \equiv y - n$, so ist

$$e_K = \pi - (1-u) \cdot (k-n)$$

$$\text{und } e_N = \pi + u \cdot (k-n) \quad (30)$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & -(1-u) \\ 1 & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ k-n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_K \\ e_N \end{pmatrix} \quad (30a)$$

Daraus erhält man für

$$\pi = u \cdot e_K + (1-u) \cdot e_N \quad (31)$$

1) Die Möglichkeit einer unterschiedlichen Interpretation der Fortschrittsgrenze im Lichte verschiedener Fortschrittskonzepte wurde zuerst von Chang herausgearbeitet. Vgl. W. W. Chang, A Model ..., a.a.O. insbes. S. 206 ff. Der folgende Abschnitt lehnt sich eng an die betreffenden Ausführungen von Chang an.

Die Höhe des technischen Fortschritts ist also ein mit Lohn- und Profitquote gewichtetes arithmetisches Mittel der Veränderungsrate der Durchschnittsproduktivitäten von Kapital und Arbeit e_K und e_N .

Außerdem läßt sich zeigen, daß

$$\pi = u \cdot (\dot{f}_K / f_K) + (1-u) \cdot (\dot{f}_N / f_N) \quad (32)$$

ist.¹⁾

Leitet man schließlich die Beziehungen

$$r = f_K(K, N, t)$$

und

$$w = f_N(K, N, t)$$

logarithmisch ab, so erhält man, wenn man $m_i = \frac{1}{f_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial t}$ = $\dot{f}_i / f_i$ für $i = K, N$ setzt, als Veränderungsrate von Zinssatz und Lohnsatz²⁾

1) Beweis:

Nach dem Eulerschen Theorem gilt $Y = f_K \cdot K + f_N \cdot N$.

Leitet man diese Beziehung nach t ab und dividiert durch Y , so erhält man

$$y = u \cdot (k + \dot{f}_K / f_K) + (1-u) \cdot (n + \dot{f}_N / f_N)$$

Ersetzt man in diesem Ausdruck y durch (29), so ergibt sich (32).

2) Beweis:

Das totale Differential von $r = f_K(K, N, t)$ ist

$$dr = \frac{\partial r}{\partial K} \cdot dK + \frac{\partial r}{\partial N} \cdot dN + \frac{\partial r}{\partial t} \cdot dt$$

Berücksichtigt man, daß $\partial r / \partial i = f_{Ki}$ für $i = K, N, t$ ist, und dividiert durch dt und $r = f_K$, so erhält man

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{f_{KK} \cdot K}{f_K} \cdot k + \frac{f_{KN} \cdot N}{f_K} \cdot n + \frac{f_{Kt}}{f_K}$$

Setzt man nun für $f_{KK} = -\frac{N}{K} \cdot f_{KN}$ und für $f_{Kt} / f_K = m_K$, so erhält man

$$\frac{\dot{r}}{r} = m_K - \frac{f_{KN} \cdot N}{f_K} \cdot (k-n)$$

Erweitert man schließlich den Bruch auf der rechten Seite mit Y und f_N und berücksichtigt, daß

$$\frac{f_K \cdot f_N}{Y \cdot f_{KN}} = \sigma \text{ und } \frac{f_N \cdot N}{Y} = (1-u) \text{ ist, so}$$

ergibt sich für $\dot{r}/r$ die Beziehung (33).

Der Ausdruck für w/w ergibt sich analog.

$$\begin{aligned}\frac{\dot{r}}{r} &= m_K - \frac{1-u}{\sigma} \cdot (k-n) \\ \frac{\dot{w}}{w} &= m_N + \frac{u}{\sigma} \cdot (k-n)\end{aligned}\quad (33)$$

Berücksichtigt man nun, daß $\dot{f}_K/f_K = \frac{\dot{r}}{r}$ und $\dot{f}_N/f_N = \frac{\dot{w}}{w}$ ist, so ergibt sich aus (32)

$$\pi = u \cdot m_K + (1-u) \cdot m_N \quad (34)$$

Der technische Fortschritt ergibt sich also auch als mit Lohn- und Profitquote gewogenes arithmetisches Mittel aus den nicht auf Faktoreinsatzänderungen zurückführbaren Veränderungen der Grenzproduktivitäten von Arbeit und Kapital.

Subtrahiert man andererseits die beiden Gleichungen von (33) voneinander und löst nach $(k-n)$ auf, so erhält man, wenn man dies in das System (30) einsetzt:

$$\begin{aligned}e_K &= \pi - (1-u) \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{r}}{r} + m_K - m_N \right) \\ e_N &= \pi + u \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{r}}{r} + m_K - m_N \right)\end{aligned}\quad (35)$$

Mißt man nun die Effizienzänderungen der Faktoren infolge technischen Fortschritts durch die Rate der Verringerung der Inputkoeffizienten e_K und e_N bei konstantem Faktorpreisverhältnis, so erhält man für diese

$$\begin{aligned}b_K &\equiv e_K \left| \frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{r}}{r} \right. = \pi - (1-u) \cdot \sigma \cdot (m_K - m_N) \\ b_N &\equiv e_N \left| \frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{r}}{r} \right. = \pi + u \cdot \sigma \cdot (m_K - m_N)\end{aligned}\quad (36)$$

und daraus für π , indem man eine Gleichung von (36) nach $(m_K - m_N)$ auflöst und in die andere Beziehung einsetzt:

$$\pi = u \cdot b_K + (1-u) \cdot b_N \quad (37)$$

Die Indizes b_K und b_N entsprechen dem Hicks'schen Konzept des technischen Fortschritts und seien deshalb als "Hicks'sche Parameter" bezeichnet.

Ist der technische Fortschritt Hicks-neutral, so ist $b_K = b_N$, denn der technische Fortschritt ist dann neutral im Sinne von Hicks, wenn sich die Grenzproduktivitäten von

Arbeit und Kapital im gleichen Verhältnis erhöhen. Er ist also Hicks-neutral, wenn $m_K = m_N$ ist. Ist aber dies der Fall, so ist auch $b_K = b_N$. Ist $b_K \neq b_N$, so ist der technische Fortschritt nicht neutral im Sinne von Hicks. Man kann daher $\beta = b_N - b_K$ als ein Maß für den Hicks'schen Bias definieren. Dann ist, wie man sich leicht überzeugen kann, der technische Fortschritt Hicks-arbeitssparend, wenn $\beta > 0$, und Hicks-kapitalsparend, wenn $\beta < 0$ ist.

In unserem Zusammenhang wichtiger als die "Hicks'schen Parameter" sind die "Harrodschen Parameter"

$$q_K \equiv e_K \Big|_{\dot{r}=0}$$

und

$$q_N \equiv e_N \Big|_{\dot{r}=0}$$

die die Harrodschen Vorstellungen über den technischen Fortschritt verkörpern.

Einen Ausdruck für diese Parameter erhält man, wenn man die erste Gleichung von (33) nach k -n auflöst und das Ergebnis in (30) einsetzt. Es ist dann

$$q_K = \pi - \sigma \cdot m_K$$

und

$$q_N = \pi + \frac{u}{1-u} \cdot \sigma \cdot m_K \quad (38)$$

und deshalb

$$e_K = q_K + \sigma \cdot \frac{\dot{r}}{r}$$

und

$$e_N = q_N - \frac{u}{1-u} \cdot \sigma \cdot \frac{\dot{r}}{r} \quad (39)$$

Für π erhält man aus (38) die Beziehung

$$\pi = u \cdot q_K + (1-u) \cdot q_N \quad (40)$$

Der technische Fortschritt ist nun Harrod-neutral, wenn die Durchschnittsproduktivität des Kapitals bei konstantem Zinssatz konstant bleibt. Dies ist der Fall, wenn $q_K = 0$. q_K stellt deshalb ein Maß zur Erfassung des Harrodschen Bias dar, und zwar ist $q_K \geq 0$, je nachdem ob der technische Fortschritt kapitalsparend oder arbeitssparend im Sinne Harrods ist.

Analog lassen sich auch Parameter im Sinne Solows formulieren:

und
$$u_K \equiv e_K \Big|_{w=0}$$
$$u_N \equiv e_N \Big|_{w=0}$$

auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.¹⁾
Auch aus ihnen läßt sich für π die Beziehung

$$\pi = u \cdot u_K + (1-u) \cdot u_N \quad (41)$$

herleiten.²⁾

In unserem Zusammenhang wichtig ist dagegen das augmenting-Konzept des technischen Fortschritts. Geht man davon aus, daß der technische Fortschritt immer faktorerhöhend wirkt, so ist

$$Y = F(K, N, t) = G(AK, BN)$$

Daraus erhält man, wie Drandakis und Phelps gezeigt haben,³⁾ für m_N und m_K

und
$$m_N = b - \frac{u}{\sigma} \cdot (b-a)$$
$$m_K = a + \frac{1-u}{\sigma} \cdot (b-a) \quad (42)$$

und daher wegen (34)

$$\pi = u \cdot a + (1-u) \cdot b \quad (43)$$

Mit den soeben vorgestellten vier Konzeptionen zur Erfassung des technischen Fortschritts über die Effizienzänderungen der einzelnen Faktoren stehen uns auch vier verschiedene Möglichkeiten zur Interpretation der Fortschritts-grenze zur Verfügung. In allen Fällen beschreibt die Fortschritts-grenze das Ausmaß, mit dem die Unternehmer die Effizienz der einzelnen Faktoren alternativ erhöhen können. Als Maßstab zur Erfassung der Effizienzänderungen der einzelnen Faktoren dient dabei deren Durchschnittsproduktivität. Die Innovation-possibility-frontier, die hier ganz allgemein durch die Funktion $I_N = \phi(I_K)$ mit $\phi'(I_K) < 0$ und

1) Vgl. W. W. Chang, A Model ..., a.a.O. S. 207

2) Ebenda S. 207

3) Vgl. E. M. Drandakis und E. S. Phelps, A Model ..., a.a.O. S. 831 und Appendix

$\phi''(I_K) < 0$ beschrieben sein soll, besitzt also, je nachdem welches Fortschrittskonzept man unterstellt, die explizite Form (37), (40), (41) oder (43). Die vier möglichen Parameter zur Erfassung der Erhöhung der durchschnittlichen Faktorproduktivität infolge technischen Fortschritts stehen dabei folgendermaßen zueinander in Beziehung:¹⁾

$$\begin{aligned} q_K &= -\sigma \cdot m_K + \pi \\ &= b_K - \sigma \cdot \pi \\ &= u_K - \frac{1}{u} \cdot \sigma \cdot \pi \\ &= (1 - \sigma) \cdot a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q_N &= -\sigma \cdot m_N + \frac{1}{1-u} \cdot (1-u+\sigma) \cdot \pi \\ &= b_N + \frac{u}{1-u} \cdot \sigma \cdot \pi \\ &= u_N + \frac{1}{1-u} \cdot \sigma \cdot \pi \\ &= (1 - \sigma) \cdot b + \frac{1}{1-u} \cdot \sigma \cdot \pi \end{aligned}$$

Aus diesem Zusammenhang folgt, daß die verschiedenen Parameter im allgemeinen nicht gleich sind. Vor allem sind bei $\sigma \neq 0$ die Parameter b_K und u_K bei Harrod-neutralem technischem Fortschritt nicht Null. Dagegen ist in diesem Fall, wie wir oben gesehen haben, $q_K = 0$ und deshalb bei $\sigma \neq 1$ auch $a = 0$.

Gleich sind die verschiedenen Parameter nur, wenn $\sigma = 0$ ist. Nur in diesem Fall gilt $q_K = b_K = u_K = a$ und $q_N = b_N = u_N = b$.

1) Beweis:

1. $q_K = b_K - \sigma \pi$

Setzt man in (36) für m_N (34) ein, so ist

$$b_K = -\sigma \cdot m_K + \pi + \sigma \pi. \text{ Berücksichtigt man (38), so folgt die Behauptung.}$$

2. $q_K = (1 - \sigma) \cdot a$:

Setzt man (42) in (38) ein und berücksichtigt, daß wegen (43) $(1-u) \cdot b = \pi - u \cdot a$ ist, so folgt die Behauptung.

3. $q_K = u_K - \frac{1}{u} \cdot \sigma \pi$:

Da auf die Solowschen Parameter nicht näher eingegangen wurde, soll ein Beweis unterbleiben.

Die Beweise für q_N erfolgen analog.

Das bedeutet, daß die Fortschrittsgrenze nur dann eindeutig interpretierbar ist, wenn $\sigma = 0$ ist. In allen anderen Fällen sind die verschiedenen Parameter nicht gleich und damit ist auch die Fortschrittsgrenze unterschiedlich interpretierbar. Daraus folgt aber auch, daß die Aufschlüsselung des technischen Fortschritts auf die Effizienzerhöhungen der einzelnen Faktoren notwendigerweise zu verschiedenen Ergebnissen führen muß, sofern $\sigma > 0$ ist.

Damit erhebt sich natürlich die Frage, ob nicht der Verlauf der Fortschrittsgrenze selbst von der Substitutionselastizität beeinflußt wird. So ist es nach Aufdeckung dieser Zusammenhänge z. B. durchaus denkbar, daß die Steigung der Fortschrittsgrenze bei unterschiedlichen Interpretationen verschieden ist. Das würde aber zur Folge haben, daß auch die Einkommensverteilung, die durch die Steigung der Fortschrittsgrenze determiniert wird, bei einer Substitutionselastizität von größer als Null im langfristigen Gleichgewicht je nach Interpretation der Fortschrittsgrenze unterschiedlich ist, womit unsere frühere Feststellung, daß die Einkommensverteilung bei exogen gegebener konstanter Sparquote im langfristigen Gleichgewicht von der Substitutionselastizität unabhängig ist, doch etwas relativiert wird.

Daß die Interpretation der Fortschrittsgrenze auch auf die Stabilität unseres im letzten Abschnitt vorgestellten Wachstumsmodells Auswirkungen hat, soll im folgenden gezeigt werden, wo wir zeigen werden, daß dieses Wachstumsmodell unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität global stabil ist, sofern man die Fortschrittsgrenze als Funktion zwischen den Effizienzparametern im Harrodschen Sinne auffaßt.

d) Gleichgewichtswachstum bei Interpretation der Fortschrittsgrenze im Harrodschen Sinne

Um zu ermitteln, welche Bedeutung die Interpretation der Fortschrittsgrenze für das Gleichgewichtswachstum besitzt, braucht man in dem oben schon vorgestellten Ein-Sektor-Modell mit induziertem technischem Fortschritt nur das Konzept des faktorerhöhenden technischen Fortschritts durch eine alternative Fortschrittskonzeption zu ersetzen und dann die Eigenschaften des so variierten Modells zu untersuchen.¹⁾

Wenn wir im folgenden zeigen wollen, daß auch das Ein-Sektor-Modell mit technischem Fortschritt unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität global stabil ist, sofern man die technische Fortschrittsgrenze im Harrodschen Sinne interpretiert, so brauchen wir deshalb nur das augmenting-Konzept durch das Harrod-sche Fortschrittskonzept zu ersetzen.

Für $\dot{k} = k \cdot (y - k)$ erhalten wir in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\dot{k} = -k \cdot (1-u) \cdot \left[k - n - q_N - \frac{u}{1-u} \cdot q_K \right] \quad (44)$$

und für $\frac{\dot{u}}{u} = \left(\frac{\dot{r}}{r} + k - y \right)$ die Beziehung

$$\dot{u} = u \cdot (1-u) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \cdot \left[k - n - q_N - \frac{1+u}{(1-u)} \cdot \frac{(\sigma-1)}{(\sigma-1)} \cdot q_K \right] \quad (45)^2)$$

1) Das hat W. W. Chang für den Fall des Harrodschen Fortschrittskonzepts getan und gelangte dabei zu den Ergebnissen, die wir im folgenden im einzelnen herleiten werden. Vgl. W. W. Chang, A Model ..., a.a.O. S. 209 f

2) Gleichung (44) erhält man, wenn man in der Beziehung $\dot{k} = k \cdot (y - k)$ berücksichtigt, daß $y = u \cdot k + (1-u) \cdot n + \pi$ und im Harrod-Fall $\pi = u \cdot q_K + (1-u) \cdot q_N$ ist.

Gleichung (45) erhält man, wenn man in der Beziehung $\dot{u} = u \cdot \left(\frac{\dot{r}}{r} + k - y \right)$ berücksichtigt, daß

$$\frac{\dot{r}}{r} = m_K - \frac{1-u}{\sigma} \cdot (k - n)$$

und

$$y = u \cdot k + (1-u) \cdot n + \pi$$

Die langfristige Ruhelage ist, wie wir wissen, dann erreicht, wenn $\dot{k} = 0$ und $\dot{u} = 0$ ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn $q_K = 0$, also der technische Fortschritt Harrod-neutral ist, und $k = n + q_N$ ist, d. h. k mit der natürlichen Wachstumsrate wächst. Das Gleichgewicht hat sich demnach gegenüber dem Modell mit faktorerhöhendem technischem Fortschritt nicht verändert.

Die Stabilität des durch die Beziehungen (44) und (45) beschriebenen Differentialgleichungssystems hängt, wie wir bei der Stabilitätsuntersuchung des ursprünglichen Modells ausführlich gezeigt haben, von den Eigenschaften der Jacobischen Matrix dieses Systems im Gleichgewicht ab.

Bezeichnen wir die partiellen Ableitungen im Gleichgewicht von $\dot{k} = F_1^*(k, u) = 0$ mit f_{11} und f_{12} und jene von $\dot{u} = F_2^*(k, u) = 0$ mit f_{21} und f_{22} , so ist die Ljapunowsche Matrix der ersten Näherung des Systems gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Ann. 2, Fortsetzung

und schließlich $\pi = u \cdot m_K + (1-u) \cdot m_N$ ist.

Man erhält dann zunächst

$$\dot{u} = u \cdot (1-u) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \cdot (k-n) + m_K - m_N \right]$$

Da aber $q_K = -\sigma \cdot m_K + \pi$

und $q_N = -\sigma \cdot m_N + \frac{1}{1-u} \cdot (1-u+\sigma)$ ist, folgt

$$m_K = \frac{1}{\sigma} \cdot (\pi - q_K)$$

und $m_N = \frac{1}{\sigma} \cdot \left[\left(\frac{1-u+\sigma}{1-u} \right) \cdot \pi - q_N \right]$

und daraus $m_K - m_N = \frac{1}{\sigma} \cdot (q_N - q_K - \frac{\sigma}{1-u} \cdot \pi)$

Da aber für π auch gilt $\pi = u \cdot q_K + (1-u) \cdot q_N$, erhält man schließlich

$$m_K - m_N = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \left[-q_N - \frac{1+u}{(1-u)} \cdot \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right) \cdot q_K \right]$$

Dies in $\dot{u} = F(k, u)$ eingesetzt, ergibt (45).

mit

$$f_{11} = \frac{\partial F_1^*}{\partial k} = -(1-u) \cdot k < 0$$

$$f_{12} = \frac{\partial F_1^*}{\partial u} = 0$$

$$f_{21} = \frac{\partial F_2^*}{\partial k} = u \cdot (1-u) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \quad \left| \begin{array}{l} < 0 \text{ für } \sigma < 1 \\ > 0 \text{ für } \sigma > 1 \end{array} \right.$$

$$f_{22} = \frac{\partial F_2^*}{\partial u} = \left(\frac{1-u}{\sigma}\right) \cdot \frac{dq_N}{du} < 0 \quad \text{da } \frac{dq_N}{du} < 0 \quad 1)$$

Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{k} = F_1(k, u)$$

$$\dot{u} = F_2(k, u)$$

ist nun lokal stabil, wenn die Spur der Jacobischen Matrix J negativ und die Determinante von J positiv ist.

Da in unserem Fall

$$\text{sp } J = f_{11} + f_{22} = (1-u) \left[\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dq_N}{du} - k \right] < 0$$

$$\text{und } \det J = f_{11} \cdot f_{22} - f_{12} \cdot f_{21} = - (1-u)^2 \cdot \frac{k}{\sigma} \cdot \frac{dq_N}{du} > 0$$

ist, ist das durch (44) und (45) beschriebene Modell lokal stabil.

Darüber hinaus ist nach Olech ein System global stabil, wenn entweder $f_{11} \cdot f_{22} \neq 0$ oder $f_{12} \cdot f_{21} \neq 0$ ist. Da in unserem Fall $f_{11} \cdot f_{22} \neq 0$ ist, ist das durch (44) und (45) beschriebene Modell auch global stabil.

Sowohl die Bedingungen für die lokale Stabilität als auch jene für die globale Stabilität sind in unserem

1) Der Beweis, daß die Ableitung dq_N/du negativ ist, folgt aus den Eigenschaften der im Sinne des Harrodschen Fortschrittskonzepts interpretierten Fortschrittsgrenze und läßt sich analog zu der auf Seite 137 dieser Arbeit für den augmenting-Fall dargestellten Beweisführung führen.

jetzigen Modell von σ unabhängig. Deshalb ist auch die Stabilität unseres Modells unabhängig von der Höhe der Substitutionselastizität immer gewährleistet.

Vergleicht man die beiden Versionen eines Ein-Sektor-Modells mit induziertem technischem Fortschritt mit dem einfachen neoklassischen Wachstumsmodell, so ist zunächst festzuhalten, daß sich an dem früher schon gefundenen Ergebnis, daß Sparquote und Substitutionselastizität das Wachstum langfristig nicht zu beeinflussen vermögen, sondern allenfalls eine Niveauverschiebung des langfristigen Wachstumspfad bewirken können, auch bei Einführung eines technischen Fortschritts nichts ändert. Vielmehr wird die Allgemeingültigkeit des Theorems von der Unabhängigkeit der Wachstumsrate von Sparquote und Form der Produktionsfunktion durch die Ausdehnung auf Volkswirtschaften mit technischem Fortschritt eher bekräftigt.

Außerdem kann festgestellt werden, daß der technische Fortschritt unter nicht unrealistischen Annahmen auf Grund modellendogener Kräfte dahin tendiert, Harrod-neutral zu sein. Dieses deduktiv abgeleitete Ergebnis steht nicht in Widerspruch zur Realität, denn die in fast allen westlichen Industrieländern anzutreffende empirische Beobachtung einer tendenziellen langfristigen Konstanz der Einkommensverteilung bei konstantem Zinssatz und ständig steigender Kapitalintensität spricht dafür, daß der technische Fortschritt langfristig tatsächlich tendenziell Harrod-neutral war und damit eine ständige Bewegung in der Nähe des Gleichgewichts zu erkennen ist.

Die Tatsache, daß der technische Fortschritt in Wirklichkeit tendenziell Harrod-neutral war, geht unmittelbar zwingend aus der zweiten Version unseres Wachstumsmodells hervor, denn nach diesem Modell ist das langfristige Gleichgewicht immer stabil. Neigt man

dagegen mehr zur ursprünglichen Version von Drandakis und Phelps, so würde die empirisch beobachtbare Bewegung in der Nähe des langfristigen Gleichgewichts dafür sprechen, daß die Substitutionselastizität in der Realität kleiner als Eins ist. Nach dieser Modellversion ist das Gleichgewicht nämlich nur stabil, wenn σ kleiner als Eins ist. In ersterem Falle kommt der Substitutionselastizität für das Gleichgewichtswachstum nur eine höchst untergeordnete Bedeutung zu, denn sie vermag allenfalls das Niveau des Wachstumspfades zu beeinflussen, nicht dagegen die gleichgewichtige Wachstumsrate selbst und die Stabilität des langfristigen Gleichgewichts. In letzterem Falle dagegen nimmt die Substitutionselastizität, trotz ihrer Bedeutungslosigkeit für die gleichgewichtige Wachstumsrate, in der Wachstumstheorie eine zentrale Stellung ein, denn das langfristige Gleichgewicht ist in diesem Fall aus einer beliebigen Ausgangssituation heraus nur erreichbar, wenn die Substitutionselastizität kleiner als Eins ist.

Abgeleitet wurden diese Ergebnisse allerdings unter der Voraussetzung einer exogen gegebenen konstanten Sparquote. Wir haben jedoch schon bei der Untersuchung der Substitutionselastizität bezüglich ihrer Auswirkung auf die Einkommensverteilung festgestellt, daß durch die Annahme einer endogen determinierten Sparquote die Ergebnisse nicht unbeträchtlich verändert werden können. Im folgenden soll deshalb untersucht werden, inwieweit die Ergebnisse der neoklassischen Wachstumstheorie durch die Annahme einer endogen determinierten Sparquote modifiziert werden.

e) Gleichgewichtswachstum bei endogen determinierter Sparquote

Um in einem Wachstumsmodell die Sparquote als modellendogene Größe zu erhalten, greifen wir unsere im letzten Kapitel erläuterten Überlegungen wieder auf und nehmen wieder an, daß die Unternehmer, die mit den Kapitalisten identisch sein mögen, in ihrem Investitionsverhalten durch keine Knappheit der Finanzierungsmittel eingeengt seien, daß also bei jedem beliebigen realen Zinssatz beliebig viele Mittel für Investitionen zur Verfügung stehen. Außerdem nehmen wir an, daß die Kapitalisten bestrebt sind, ihren Gesamtprofit zu maximieren, was sie dadurch erreichen, daß sie so lange investieren, bis eine weitere relative Erhöhung der Kapitalintensität zu einer relativen Senkung der Grenzproduktivität des Kapitals in genau demselben Ausmaß führt, so daß der Gesamtgewinn $P = r \cdot K$ sich nicht weiter erhöht. Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, daß in einem solchen gewinnmaximalen Zustand die Einkommensverteilung konstant ist und allein von der Höhe der Substitutionselastizität determiniert wird. Im folgenden wollen wir nun untersuchen, ob unter diesen Voraussetzungen ein steady-state-Wachstumspfad möglich ist und wie sich die einzelnen Variablen in einem solchen golden age entwickeln.

Gehen wir von einer wachsenden Wirtschaft aus, in der sowohl die Bevölkerung wächst als auch ein technischer Fortschritt stattfindet, so gilt es also nun zu ermitteln, mit welcher Rate der Kapitalstock wachsen muß bzw. wie hoch die Sparquote sein muß, damit der Zustand des makroökonomischen Gewinnmaximums nicht verlassen wird. Dazu nehmen wir an, daß die Bevölkerung mit der exogen gegebenen konstanten Rate n wächst und daß ein technischer Fortschritt stattfindet, der sich in einer kapitalerhöhenden Komponente a und einer arbeitserhöhenden Komponente b manifestiert. Beide Raten seien exogen gegeben und konstant. Unterstellt man außerdem wieder, daß die Substitutionselastizität im Zeitablauf konstant ist, so kann wieder die CES-Funktion in der Form von David und van de Klundert verwendet werden. Aus ihr erhält man für die Wachstumsrate des Sozialprodukts

$$y = u \cdot (a+k) + (1-u) \cdot (b+n) \quad (\text{III, } 12)$$

In dieser Beziehung sind $x \in \{a, b, n\} > 0$ exogen gegeben, u , k und y dagegen modellendogene Größen. Im Gewinnmaximum ist nun aber, wie wir aus dem letzten Kapitel wissen (vgl. Gleichung III, 21a), $u = 1 - \sigma$ und

$$K(t) = s^{-1/s} \cdot \frac{B(t)}{A(t)} \cdot N(t)$$

Die Wachstumsrate des Kapitalstocks beträgt deshalb

$$k = n + b - a \quad (46)$$

Sie ist also im makroökonomischen Gewinnmaximum konstant. Der Kapitalstock muß, damit das Gewinnmaximum erhalten bleibt, um so stärker wachsen, je größer die Wachstumsrate der Bevölkerung ist und je höher die Rate des arbeitserhöhenden technischen Fortschritts ist. Andererseits braucht um so weniger neues Kapital gebildet zu werden, je höher der kapitalerhöhende Fortschritt ist. Wir stehen also vor dem Ergebnis, daß die Unternehmer auf eine Erhöhung des Arbeitsangebots bzw. auf einen arbeitserhöhenden technischen Fortschritt mit einer Nettoinvestition oder durch Einführung eines kapitalerhöhenden technischen Fortschritts reagieren müssen, wenn sie den Zustand des makroökonomischen Gewinnmaximums erhalten wollen.

Das Sozialprodukt wächst in diesem Fall mit der Rate

$$y = n + b \quad (47)$$

und ist damit gegenüber unseren bisherigen Ergebnissen unverändert. Sowohl die Wachstumsrate des Kapitalstocks als auch jene des Einkommens bleibt nach wie vor von der Sparquote und der Höhe der Substitutionselastizität unabhängig. Das neoklassische Theorem von der Unabhängigkeit der gleichgewichtigen Wachstumsrate von der Sparquote und der Form der Produktionsfunktion behält also unverändert seine Gültigkeit. Allerdings ist die Wachstumsrate des Kapitalstocks geringer als jene des Einkommens, was zu einer Verringerung des Kapitalkoeffizienten mit der Rate a führt. Dagegen wächst die Kapitalintensität langfristig mit der Rate $b - a$. Ebenfalls nicht konstant ist unter diesen Voraussetzungen

die Sparquote. Sie beträgt¹⁾

$$s = \left(\frac{s}{1+s}\right)^{-1/\xi} \cdot \frac{1}{A(t)} \cdot (n+b-a) \quad (48)$$

Sie verringert sich im Laufe der Zeit ständig mit der konstanten Rate a , denn es ist $\dot{s}/s = -a$. Wegen dieser Veränderungen von K/N , K/Y und s im Laufe der Zeit ist es trotz der Tatsache, daß alle Wachstumsraten im makroökonomischen Gewinnmaximum im Zeitablauf konstant sind, nicht unproblematisch, hier von einem steady-state-Wachstum zu sprechen. Denn es scheint ökonomisch wenig sinnvoll zu sein, von einem golden age zu sprechen, wenn sich die Sparquote ständig verändert. Da die Veränderungsrate der Sparquote wie auch die des Kapitalkoeffizienten negativ ist, müßte die Sparquote langfristig gegen Null tendieren - ein ökonomisch wenig sinnvolles Ergebnis. Ist allerdings der technische Fortschritt Harrod-neutral, d. h. ist $a = 0$, so bleiben Sparquote und Kapitalkoeffizient im Zeitablauf konstant. In diesem Fall existiert eine langfristige Ruhelage und damit ein golden age.

Diese Tatsache zwingt natürlich unmittelbar zu dem Verdacht, daß das im vorigen Modell abgeleitete Ergebnis, daß der technische Fortschritt im langfristigen Gleichgewicht Harrod-neutral ist, in erster Linie Folge der Annahme ist, daß die Sparquote langfristig konstant sei. Wie unser jetziges Modell zeigt, ist es nämlich auch durchaus bei einer sinkenden, d. h. nicht konstanten, Sparquote denkbar, daß die Wachstumsraten der Faktoren und des Einkommens langfristig konstant sind. In diesem Fall ist allerdings der technische Fortschritt nicht mehr Harrod-neutral. Viel-

- 1) Diese Beziehung erhält man, indem man in die Beziehung $s = I/Y$ für $I = \dot{K}$ die Beziehung

$$\dot{K} = s^{-1/\xi} \cdot \frac{B}{A} \cdot N \cdot (n+b-a)$$

einsetzt und für Y den Ausdruck

$$Y = \left[A^{-\xi} \cdot s \cdot \left(\frac{B}{A} \cdot N \right)^{-\xi} + (BN)^{-\xi} \right]^{-1/\xi}$$

den man erhält, wenn man in die Produktionsfunktion den gewinnmaximalen Wert für K einsetzt.

mehr muß das Sinken der Sparquote durch einen kapitalerhöhenden Fortschritt kompensiert werden.

Dieses Ergebnis widerspricht in gewisser Weise der Behauptung verschiedener Autoren, daß ein langfristiges Gleichgewicht nur möglich sei, wenn der technische Fortschritt Harrod-neutral ist.¹⁾ Bei all diesen Autoren wird die Sparquote als exogen gegeben und konstant angenommen, jedoch findet sich bei keinem ein Hinweis darauf, daß die Harrod-Neutralität des technischen Fortschritts als "notwendige" Bedingung für ein langfristiges Gleichgewicht eine Implikation einer als konstant angenommenen Sparquote ist.

Auf diese Tatsache wäre allenfalls aus einem Modellansatz von Drandakis und Phelps zu schließen, in dem sie eine exogen gegebene Sparquote annehmen, die mit einer konstanten Rate exponentiell abnimmt. Auch in diesem Fall, so weisen Drandakis und Phelps nach, existiert nur ein langfristiges Gleichgewicht, in dem die Wachstumsraten des Kapitalstocks und des Einkommens sowie die Verteilungsrelation konstant sind. In

1) Die Existenz und Stabilität eines langfristigen Gleichgewichts bei Harrod-neutralem Fortschritt wurde zuerst von H. Uzawa bewiesen (vgl. H. Uzawa, Neutral Inventions ..., a.a.O.). Hahn und Matthews gehen einen Schritt weiter und behaupten, daß "if technical progress is not Harrod-neutral it is thus plain that there cannot normally be steady growth." (Siehe F. H. Hahn und R. C. O. Matthews, The Theory of Economic Growth: A Survey, in: The Economic Journal, Vol. 74 (1964), S. 779 - 902, hier S. 829) Ähnlich äußert sich auch W. D. Nordhaus, wenn er schreibt: "It was shown ... that for $\sigma \neq 1$ there is a unique stationary equilibrium satisfying the necessary conditions. We called this the Harrod-equilibrium." (Siehe W. D. Nordhaus, The Optimal Rate and Direction of Technical Change, in: Essays on the Theory of Optimal Economic Growth, edited by K. Shell, Cambridge (Mass.), London 1967, S. 53 - 66, hier S. 59) In diesem Sinne äußern sich auch Drandakis und Phelps (vgl. E. M. Drandakis und E. S. Phelps, A Model ..., a.a.O. S. 837) und C. E. Ferguson (vgl. C. E. Ferguson, Neoclassical Theory of Technical Progress and Relative Factor Shares, in: The Southern Economic Journal, Vol. 34 (1967/68), S. 490 - 504, hier S. 497).

diesem Fall ist der technische Fortschritt im Gleichgewicht jedoch nicht Harrod-neutral.¹⁾

Das Wachstumsgleichgewicht, das sich unter der Gewinnmaximierungshypothese, wie sie in unserem Modell getroffen wurde, einstellt, ist also ein langfristiges Gleichgewicht in diesem Sinne, sofern von der Annahme eines exogen gegebenen arbeits- und kapitalerhöhenden technischen Fortschritts ausgegangen wird, und stimmt mit dem üblichen neoklassischen langfristigen "Harrod-equilibrium" nur dann überein, wenn angenommen wird, daß der technische Fortschritt rein arbeitserhöhend wirkt. Im ersten Fall nimmt die sich endogen ergebende Sparquote mit der Rate des kapitalerhöhenden technischen Fortschritts exponentiell ab, im letzteren Fall bleibt sie im Zeitablauf konstant. In beiden Fällen beeinflußt die Substitutionselastizität die steady-state-Wachstumsrate nicht, so daß das Theorem von der Unabhängigkeit der gleichgewichtigen Wachstumsrate von der Form der Produktionsfunktion auch dann erhalten bleibt, wenn die Kapitalisten den Gesamtgewinn maximieren.

1) Vgl. E. M. Drandakis und E. S. Phelps, A Model ..., a.a.O. S. 837

4. Bedeutung und Problematik der Substitutionselastizität im neoklassischen Zwei-Sektoren-Modell

a) Einführung

Ziel unserer bisherigen Ausführungen zur Darstellung der Bedeutung der Substitutionselastizität für das Gleichgewichtswachstum war es, das Wesentliche eines langfristigen Wachstumsgleichgewichts in möglichst einfacher Form darzustellen und die Bedeutung der Substitutionselastizität für Existenz, Lage und Stabilität dieses Gleichgewichts herauszuarbeiten. Dabei mußte naturgemäß eine Anzahl "heroischer" Annahmen gemacht werden.

Eine dieser mehr oder weniger unrealistischen Annahmen war die, daß in einer Volkswirtschaft nur ein Gut produziert wird, das ohne jeglichen Aufwand unmittelbar sowohl als Konsumgut als auch als Kapitalgut Verwendung finden kann. Es ist jedoch klar, daß in einer modernen Volkswirtschaft eine Fülle von Gütern erzeugt wird, die teilweise für den Konsum bestimmt sind und teilweise als Kapitalgüter selbst wieder in den Produktionsprozeß eingehen, wobei praktisch immer davon ausgegangen werden muß, daß es sich bei Konsumgütern und Kapitalgütern um wesensmäßig verschiedene Güterarten handelt, die nicht alternativ verwendet werden können.

Das einfachste Modell, das diesem Tatbestand Rechnung trägt, ohne auf die sonstigen neoklassischen Annahmen zu verzichten, ist das neoklassische Zwei-Sektoren-Modell. Da ein solches Zwei-Sektoren-Modell ebenso wie das neoklassische Ein-Sektor-Modell unter den verschiedensten speziellen Annahmen bezüglich der Form der Produktionsfunktion und des technischen Fortschritts diskutiert werden kann, handelt es sich in Wirklichkeit um eine Vielzahl verschiedener Modellansätze, die aber alle zu der Gruppe der neoklassischen Zwei-Sektoren-Wachstumsmodelle zusammengefaßt werden können. Formuliert und diskutiert wurden solche Modelle in den sechziger Jahren, wobei die Diskussion um diese Modelle aber bis heute noch nicht als abgeschlossen

gelten kann.¹⁾ Im Mittelpunkt all dieser Beiträge steht dabei die Frage nach der Existenz und Stabilität eines langfristigen Gleichgewichts im Zwei-Sektoren-Modell, mit der sich insbesondere Uzawa, Solow, Takayama, Inada und Drandakis befaßt haben.²⁾ Als ein vorläufiger Abschluß dieser Diskussion kann für den Fall, daß kein technischer Fortschritt stattfindet, ein Beitrag von E. Burmeister angesehen werden, in dem diese beiden Fragen soweit geklärt wurden, daß das darüber heute verfügbare Wissen wohl als weitgehend gesichert gelten kann.³⁾ Da wir uns im folgenden insbesondere für die Bedeutung der Substitutionselastizität für die Existenz und Stabilität eines langfristigen Gleichgewichts im Zwei-Sektoren-Modell interessieren, können wir uns daher weitgehend auf die Untersuchung von Burmeister stützen. Da Burmeister seinen Beitrag auch zur Grundlage einer ausführlichen Darstellung der Probleme im Zwei-Sektoren-Modell in seinem mit A. R. Dobell herausgegebenen Buch machte, ist es zweckmäßig und läßt sich auch gar nicht ganz vermeiden, daß wir bei unseren Ausführungen zu diesem Fragenkreis weitgehend der Darstellung von Burmeister und Dobell folgen.⁴⁾

- 1) Eine gute Übersicht über die zum Zwei-Sektoren-Wachstumsmodell veröffentlichte Literatur findet sich bei Burmeister und Dobell. Vgl. E. Burmeister und A. R. Dobell, *Mathematical Theories ...*, a.a.O. S. 130 und S. 154 f
- 2) Vgl. H. Uzawa, *On a Two-Sector-Model of Economic Growth*, in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 29 (1961/62), S. 40 - 47; derselbe, *On a Two-Sector-Model of Economic Growth II*, in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 30 (1963), S. 105 - 118; R. M. Solow, *Note on Uzawa's Two-Sector-Model of Economic Growth*, in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 29 (1961/62), S. 48 - 50; A. Takayama, *On a Two-Sector Model of Economic Growth: A Comparative Static Analysis*, in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 30 (1963), S. 95 - 104; K. Inada, *On a Two-Sector Model ...*, a.a.O.; derselbe, *On the Stability of Growth Equilibria in Two-Sector Models*, in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 31 (1964), S. 127 - 142; E. M. Drandakis, *Factor Substitution in the Two-Sector Growth Model*, in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 30 (1963), S. 217 - 228
- 3) Vgl. E. Burmeister, *The Role of the Jacobian Determinant in the Two-Sector Model*, in: *International Economic Review*, Vol. 9 (1968), S. 195 - 203
- 4) Vgl. E. Burmeister und A. R. Dobell, *Mathematical Theories ...*, a.a.O. insbes. S. 107 - 126

b) Die Struktur des Zwei-Sektoren-Modells

In allen Zwei-Sektoren-Modellen wird davon ausgegangen, daß in einer Volkswirtschaft zwei in sich homogene Güterarten erzeugt werden: Kapitalgüter und Konsumgüter. Zur Produktion dieser Güter stehen zwei Faktoren zur Verfügung: Arbeit und Kapital. Konsumgüter werden nicht zur Produktion verwendet; andererseits können Arbeitsleistungen und Kapitalgüter nicht direkt konsumiert werden. Jede Güterart wird getrennt erzeugt, wobei die Produktion beider Güterarten durch zwei neoklassische Produktionsfunktionen

$$Y_i = F_i(K_i, N_i) \quad i = 1, 2 \quad (49)$$

beschrieben werden kann, die sich, sofern man für $Y_i/N_i = y_i$ und für $K_i/N_i = k_i$ setzt, auch folgendermaßen beschreiben lassen:¹⁾

$$y_i = f_i(k_i) \quad i = 1, 2 \quad (49a)$$

Bezeichnet man die in der Volkswirtschaft insgesamt verfügbaren Faktoreinsatzmengen mit K und N und unterstellt Vollbeschäftigung, so gilt, daß in beiden Sektoren zusammen die verfügbaren Ressourcen gerade voll eingesetzt werden, also:

$$K_1 + K_2 = K$$

und

$$N_1 + N_2 = N \quad (50)$$

woraus sich eine gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität in Höhe von

$$\frac{K}{N} = \frac{K_1}{N_1} \cdot \frac{N_1}{N} + \frac{K_2}{N_2} \cdot \frac{N_2}{N}$$

ergibt, bzw. wenn man für $N_1/N = \lambda$ setzt und berücksichtigt, daß dann $N_2/N = 1 - \lambda$ ist,

$$k = \lambda \cdot k_1 + (1 - \lambda) \cdot k_2 \quad (50a)$$

In diesem Ausdruck ist λ unbekannt und muß durch Allokationsentscheidungen gefunden werden. Erfolgt die Allokation der Faktoren nach neoklassischen Effizienzkriterien, so erfolgen Allokation und Verteilung nach der Grenzproduktivitätstheorie. Da in einer Volkswirtschaft aber nur ein Zins-

1) y und k stellen also jetzt keine Wachstumsraten mehr dar.

satz und ein Lohnsatz herrschen kann, gilt für den Zinssatz

$$r = f'_2(k_2) = P \cdot f'_1(k_1) \quad (51)$$

wobei P der in Konsumgütereinheiten ausgedrückte Preis der Kapitalgüter ist. Analog gilt für den Lohnsatz

$$\begin{aligned} w &= f_2(k_2) - k_2 \cdot f'_2(k_2) \\ &= P \cdot [f_1(k_1) - k_1 \cdot f'_1(k_1)] \end{aligned} \quad (52)$$

Auf Grund dieser Beziehungen beträgt das Lohn-Zins-Verhältnis ω deshalb

$$\omega = w/r = \frac{f_1(k_1)}{f'_1(k_1)} - k_1 = \frac{f_2(k_2)}{f'_2(k_2)} - k_2 \quad (53)$$

Nimmt man schließlich an, daß aus den Arbeitseinkommen ein konstanter Anteil s_w und aus den Kapitaleinkommen ein konstanter Anteil s_r gespart wird, wobei beide Sparquoten als exogen gegeben angenommen werden, so beträgt die gesamte Ersparnis einer Volkswirtschaft

$$S = s_r \cdot r \cdot K + s_w \cdot w \cdot N$$

Da andererseits auf Grund unserer eingangs getroffenen Annahmen die gesamten Investitionen gleich dem Produktionswert der neuen Kapitalgüter sind, gilt im güterwirtschaftlichen Gleichgewicht $I = S$

$$P \cdot Y_1 = s_r \cdot r \cdot K + s_w \cdot w \cdot N$$

Dividiert man diese Gleichgewichtsbedingung durch $r \cdot N$ und berücksichtigt, daß $r = P \cdot f'_1(k_1)$ ist, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\lambda \cdot y_1 = f'_1(k_1) \cdot (s_r \cdot k + s_w \cdot \omega) \quad (54)$$

Die Gleichungen (49) bis (54) stellen statische Beziehungen dar, die in einer gleichgewichtigen Volkswirtschaft mit optimaler Allokation der Produktionsfaktoren jederzeit erfüllt sein müssen. Sie beschreiben also ein momentanes Gleichgewicht.

In einem langfristigen Wachstumsgleichgewicht strebt darüber hinaus die Kapitalintensität einen konstanten Gleich-

gewichtswert k^* an.

Allgemein beträgt die Veränderung der Kapitalintensität im Zeitablauf

$$\frac{d(K/N)}{dt} = \dot{k} = \frac{\dot{K}}{N} - n \cdot k$$

Sieht man einmal davon ab, daß jährlich ein bestimmter Anteil des Kapitalstocks obsolet wird, so beträgt die Nettoveränderung des Kapitalstocks $\dot{K} = Y_1$. Setzt man diese Beziehung in obige Gleichung ein, so ist

$$\dot{k} = \frac{Y_1}{N} - n \cdot k$$

bzw. wenn man den Bruch Y_1/N mit N_1 erweitert

$$\dot{k} = \lambda \cdot y_1 - n \cdot k$$

Setzt man nun für $\lambda \cdot y_1$ Gleichung (54) ein, so erhält man für das Zwei-Sektoren-Modell folgende Differentialgleichung:

$$\dot{k} = f'_1(k_1) \cdot (s_r \cdot k + s_w \cdot w) - n \cdot k \quad (55)$$

Da n , s_r und s_w als exogen gegeben und bekannt vorausgesetzt werden, läßt sich diese Differentialgleichung auch in allgemeiner Form folgendermaßen schreiben:

$$\dot{k} = \psi(k, k_1, \omega) \quad (55a)$$

Aus Gleichung (53) ist nun unmittelbar zu erkennen, daß zwischen ω und k_1 eine eindeutige Beziehung besteht. Da sich aber das Lohn-Zins-Verhältnis auf Grund der Faktorausstattung und der Produktionsbedingungen auf dem Gesamtmarkt bildet, muß ökonomisch gesehen k_1 als Funktion von ω betrachtet werden. Da die Funktion

$$\omega = \frac{f_1(k_1)}{f'_1(k_1)} - k_1 \quad i = 1, 2 \quad (53a)$$

für $0 \leq k_1 \leq \infty$ stetig ist und, wie die Ableitung

$$\frac{d\omega}{dk_1} = - \frac{f_1(k_1) \cdot f''_1(k_1)}{[f'_1(k_1)]^2} > 0 \quad \text{wegen } f'_1(k_1) > 0 \quad (53b)$$

und $f''_1(k_1) < 0$

zeigt, im gesamten Bereich monoton wächst, existiert die inverse Funktion

$$k_1 = k_1(\omega) \quad (56)$$

in einem Bereich $a \leq \omega \leq b$, der sich ergibt, wenn k_1 in (53 a) alle reellen Zahlen von Null bis Unendlich durchläuft.¹⁾ Erfüllen beide Produktionsfunktionen $f_1(k_1)$ die Ableitungsbedingungen von Inada $f_1'(0) = \infty$ und $f_1'(\infty) = 0$ oder besitzen beide Funktionen eine konstante Substitutionselastizität, so umfaßt ω ebenfalls den gesamten Wertebereich $0 \leq \omega \leq \infty$.²⁾ Dies soll in der folgenden Analyse angenommen werden. Berücksichtigt man die Funktionalbeziehung (56) in (55 a), so vereinfacht sich (55 a) zu

$$\dot{k} = \varphi(k, k_1(\omega), \omega) = \varphi(k, \omega) \quad (55b)$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung und damit die Existenz eines langfristigen Gleichgewichtspfades im Zwei-Sektoren-Modell ist nur dann gesichert, wenn zwischen k und ω eine eindeutige Funktionalbeziehung besteht, auf Grund deren jedem Wert von k nur ein Wert von ω zugeordnet werden kann und umgekehrt. In Abbildung 13a ist eine solche eindeutige Funktionalbeziehung zwischen ω und k dargestellt.

- 1) Zu den Bedingungen für die Existenz einer inversen Funktion vgl. I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, aus dem Russischen übersetzt von V. Ziegler, 9. Aufl., Zürich, Frankfurt (Main) 1969, S. 242

- 2) Die Ableitungsbedingungen von Inada ergeben sich unmittelbar anschaulich aus Abbildung 14 auf Seite

Für den Fall einer konstanten Substitutionselastizität läßt sich diese Aussage mit Hilfe einer CES-Funktion beweisen. Bringt man die CES-Funktion

$$Y = [(AK)^{-\vartheta} + (BN)^{-\vartheta}]^{-1/\vartheta}$$

auf die Form

$$Y = A[k^{-\vartheta} + (B/A)^{-\vartheta}]^{-1/\vartheta}$$

und bildet die Ableitung

$$f'(k) = A[k^{-\vartheta} + (B/A)^{-\vartheta}]^{-(1/\vartheta+1)} \cdot k^{-(\vartheta+1)}$$

so erhält man durch Einsetzen in Gleichung (53 a)

$$\omega = \frac{k^{1+\vartheta}}{(B/A)^{\vartheta}}$$

Aus dieser Beziehung ist unmittelbar ersichtlich, daß ω für $k = 0$ ebenfalls Null ist und für $k \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen Unendlich strebt.

Abb. 13a

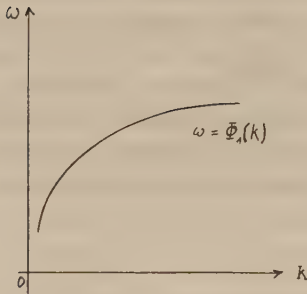
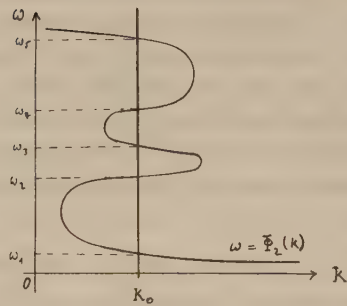


Abb. 13b

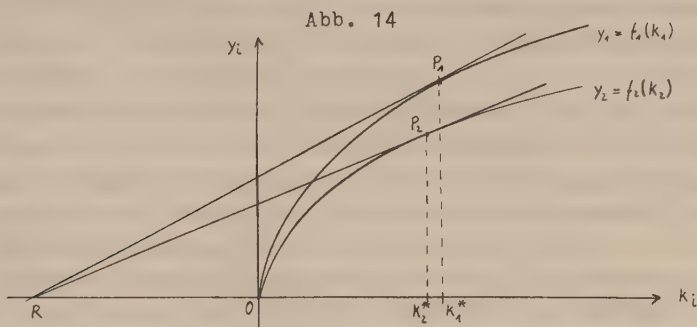


Besteht dagegen zwischen ω und k keine eindeutige Funktionalbeziehung, so daß für ein bestimmtes k mehrere Werte für ω existieren, wie das z. B. in der in Abbildung 13b dargestellten Funktionalbeziehung $\omega = \Phi_2(k)$ für den Wert k_0 der Fall ist, so ist die Differentialgleichung (55a) nicht lösbar und damit die Existenz einer langfristigen Ruhelage nicht gesichert.

Im folgenden soll nun eingehend untersucht werden, ob und unter welchen Bedingungen zwischen ω und k eine eindeutige Funktionalbeziehung mit positiver Steigung ($d\omega/dk > 0$) existiert.

c) Die Existenzbedingungen für ein langfristiges Gleichgewicht im Zwei-Sektoren-Modell

Betrachtet man Gleichung (53), so ist unmittelbar zu sehen, daß bei einem gegebenen Lohn-Zins-Verhältnis die Kapitalintensität in beiden Sektoren eindeutig determiniert ist. Dieser Zusammenhang läßt sich durch die folgende Abbildung veranschaulichen.



In dieser Abbildung wird das Lohn-Zins-Verhältnis durch die Strecke RO dargestellt.¹⁾ Ist das Lohn-Zins-Verhältnis gegeben, so ist die sich auf Grund von Minimalkostenüberlegungen dazu ergebende Kapitalintensität in beiden Sektoren ebenfalls eindeutig determiniert. In unserer Abbildung beträgt sie k_1^* und k_2^* . Berücksichtigt man nun, daß die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität k ein gewogenes arithmetisches Mittel der in den beiden Sektoren realisierten Kapitalintensität k_1^* und k_2^* ist, so läßt sich zu jeder vorgegebenen Lohn-Zins-Relation auch eine den Erfordernissen der Minimalkostenkombination genügende gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität ermitteln. Da mit zunehmendem Lohn-Zins-Verhältnis sowohl die Kapitalintensität im Konsumgütersektor als auch die im Kapitalgütersektor zunimmt, könnte nun die Vermutung entstehen, daß mit steigendem Lohn-Zins-Verhältnis auch die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität monoton steigt.

Diese Vermutung erweist sich allerdings als nicht richtig,

1) Zum Beweis dieser Behauptung vgl. etwa R. G. D. Allen, Macro-Economic Theory, a.a.O. S. 47

denn im Zwei-Sektoren-Modell läßt sich nun tatsächlich generell keine eindeutige Funktionalbeziehung zwischen ω und k mehr ermitteln. Vielmehr ist die Funktionalbeziehung zwischen ω und k , die sich in diesem Modell ermitteln läßt, nur unter ganz bestimmten Bedingungen eindeutig und damit auch ein langfristiges Wachstumsgleichgewicht nur unter ganz bestimmten Bedingungen möglich. Diese Existenzbedingungen gilt es im folgenden herauszuarbeiten, wobei uns natürlich insbesondere interessiert, ob und wie die Höhe der Substitutionselastizität in den einzelnen Sektoren und in der Gesamtwirtschaft Existenz und Stabilität im Zwei-Sektoren-Modell beeinflußt.

Dazu betrachten wir die Volkswirtschaft in einem bestimmten Zeitpunkt. Da in einem bestimmten Zeitpunkt die in einer Volkswirtschaft insgesamt verfügbaren Faktormengen K und N als gegeben angesehen werden müssen, ist die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität k zu jedem bestimmten Zeitpunkt gegeben. Als Modellvariable verbleiben dann noch y_1 , y_2 , k_1 , k_2 , ω und λ . Da im Rahmen der Analyse des Gleichgewichtswachstums aber vorausgesetzt wird, daß in jedem Augenblick die Volkswirtschaft sich im Gleichgewicht befindet, also in jedem Augenblick ein momentanes Gleichgewicht existiert, stehen zur Bestimmung dieser sechs Variablen die Beziehungen (49) bis (54) zur Verfügung, aus denen man durch geringfügige Umformung folgendes Gleichungssystem erhält:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= f_1(k_1) - y_1 = 0 && \text{Prod.Funkt. des Kapitalgutes} \\
 \Phi_2 &= f_2(k_2) - y_2 = 0 && \text{Prod.Funkt. des Konsumgutes} \\
 \Phi_3 &= \frac{f_1(k_1)}{f_1'(k_1)} - k_1 - \omega = 0 && \begin{array}{l} \text{Allokationsbedingung} \\ \text{für Sektor 1} \end{array} \\
 \Phi_4 &= \frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)} - k_2 - \omega = 0 && \begin{array}{l} \text{Allokationsbedingung} \\ \text{für Sektor 2} \end{array} \\
 \Phi_5 &= \lambda \cdot k_1 + (1-\lambda) \cdot k_2 - k = 0 && \text{Vollbeschäftigungsbedingung} \\
 &&& \text{von Arbeit und Kapital} \\
 \Phi_6 &= \lambda \cdot f_1(k_1) - f_1'(k_1) \cdot (s_r \cdot k + s_w \cdot \omega) = 0 && \text{Gleichgewichtsbedingung I = S}
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

Mit diesem Gleichungssystem, bestehend aus sechs voneinander unabhängigen Gleichungen, ist es prinzipiell möglich, eine eindeutige Lösung für die Variablen y_1 , y_2 , k_1 , k_2 , ω und λ zu ermitteln. Determiniert würden diese Lösungswerte von den exogenen Größen des Modells, unter anderem also auch von k . Damit hätten wir auch eine Beziehung zwischen ω und k . Allerdings können auch Werte von k auftreten, für die keine eindeutige Lösung des Systems ermittelt werden kann, und k kann auch solche Werte annehmen, daß das System überhaupt keine Lösung besitzt.

Um trotzdem zu einer Beziehung zwischen ω und k zu gelangen, nehmen wir zunächst an, daß ω exogen gegeben und bekannt sei. Dann sind auf Grund von Gleichung (56) k_1 und k_2 Funktionen von ω . Damit sind aber auch y_1 und y_2 wegen (49a) Funktionen von ω . Für die verbleibenden Größen λ und k erhält man, indem man die letzten beiden Gleichungen des Systems (57) geringfügig umformt, folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} (k_1 - k_2) & -1 \\ f_1 & -s_r \cdot f'_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 \\ s_w \cdot \omega \cdot f'_1 \end{pmatrix}$$

Da die Hauptdeterminante dieses Systems

$$\Delta = -(k_1 - k_2) \cdot s_r \cdot f'_1 + f_1$$

immer positiv ist,¹⁾ erhält man auf Grund der Cramerschen Regel für

$$\lambda = \frac{1}{\Delta} \cdot (s_r \cdot f'_1 \cdot k_2 + s_w \cdot \omega \cdot f'_1)$$

und für

$$k = \frac{1}{\Delta} \cdot [(k_1 - k_2) \cdot s_w \cdot \omega \cdot f'_1 + f_1 \cdot k_2]$$

Da, wie wir gesehen haben, nun aber k_1 und k_2 ihrerseits

- 1) Hinreichend für $\Delta > 0$ ist $0 \leq s_r \leq 1$. Denn es ist für $\Delta > 0$ hinreichend, daß $f_1 - s_r \cdot f'_1 \cdot k_1 > 0$. Setzt man für $f_1/f'_1 = \omega + k_1$ (vgl. Gleichg. (53)), so muß für $\Delta > 0$ $\omega + (1 - s_r) \cdot k_1 > 0$ sein. Da per Definition $0 \leq s_r \leq 1$ ist, ist das immer der Fall.

Funktionen von ω sind, ist auch $k = \bar{\Phi}(k_1, k_2, \omega)$ eine direkte Funktion von ω , nämlich $k = k(\omega)$.

Ein langfristiges Wachstumsgleichgewicht existiert nun dann, wenn die Funktion $k = k(\omega)$ eine Inverse besitzt. Dies ist, wie oben schon erwähnt wurde, der Fall, wenn $k = k(\omega)$ stetig ist und im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton steigt oder streng monoton fällt.

Um zu überprüfen, ob und unter welchen Bedingungen das der Fall ist, bilden wir das totale Differential des Gleichungssystems (57), wodurch wir ein neues Gleichungssystem der ersten Ableitungen erhalten, das in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & f'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & f'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda & 0 & k_1-k_2 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -s_w \cdot f'_1 & f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dk_1 \\ dk_2 \\ d\omega \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ dk \\ f'_1 \cdot s_r \cdot dk \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$\text{Dabei ist } s_1 = \frac{d\omega}{dk_1} = - \frac{f_1 \cdot f''_1}{[f'_1]^2} \quad s_2 = \frac{d\omega}{dk_2} = - \frac{f_2 \cdot f''_2}{[f'_2]^2}$$

$$\text{und } \gamma = \lambda \cdot f_1 - f''_1 \cdot (s_r \cdot k + s_w \cdot \omega)$$

Aus diesem Gleichungssystem erhält man auf Grund der Cramerschen Regel für $d\omega$ den Ausdruck

$$d\omega = \frac{D}{J} \cdot dk \quad (59)$$

Darin ist $D = s_1 \cdot s_2 \cdot [f_1 - f'_1 \cdot s_r \cdot (k_1 - k_2)]$ und J die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (58), die auch als die Jacobische Matrix des Gleichungssystems (57) bezeichnet wird. Formt man (59) geringfügig um, so erhält man:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{J}{D} > 0 \quad \text{für } J > 0 \quad (59a)$$

Da $f_1' > 0$ und $(f_1 - f_1' \cdot s_r \cdot k_1) > 0$ und deshalb D immer positiv ist, ist die Existenz einer Inversen der Funktion $k = k(\omega)$ dann gesichert, wenn die Determinante J der Jacobischen Matrix ihr Vorzeichen nicht ändert. Dabei ist aus ökonomischen Gründen nur der Fall $dk/d\omega > 0$ sinnvoll, also der Fall, in dem $J > 0$ ist.

Berechnet man die Determinante der Jacobischen Matrix, so erhält man

$$J = f_1 \cdot [(1-\lambda) \cdot s_1 + \lambda \cdot s_2] + s_w \cdot s_1 \cdot s_2 (k_1 - k_2) \cdot f_1' - (k_1 - k_2) \cdot s_2 \cdot [\lambda \cdot f_1' - f_1'' \cdot (s_r \cdot k + s_w \cdot \omega)] \quad (60)$$

Dieser Ausdruck ist nun, wie E. Burmeister gezeigt hat, dann positiv, wenn eine der folgenden fünf Bedingungen erfüllt ist:¹⁾

1. $s_r = s_w = s$
2. $s_r > s_w$ und gleichzeitig $k_1 < k_2$
3. $s_r < s_w$ und gleichzeitig $k_1 > k_2$ (61)
4. $k_1 = k_2$
5. $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 1$

wobei σ_1 die Substitutionselastizität im Kapitalgütersektor und σ_2 die Substitutionselastizität im Konsumgütersektor bezeichnet. Bei allen fünf Bedingungen handelt es sich um hinreichende Bedingungen für $J > 0$ und deshalb um hinreichende Bedingungen für die Existenz eines langfristigen Gleichgewichts im Zwei-Sektoren-Modell. Danach ist die Existenz eines langfristigen Gleichgewichts unter anderem immer dann gewährleistet, wenn die Summe der Substitutionselastizitäten beider Sektoren größer oder mindestens gleich Eins ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Produktionsfunktion in jedem Sektor vom Cobb-Douglas-Typ

1) Vgl. E. Burmeister, The Role ..., a.a.O. S. 199.
Die exakten Beweise befinden sich bei E. Burmeister, Stability and Causality in Two-Sector Models of Economic Growth, Massachusetts Institute of Technology Ph. D. Thesis May 1965, und E. M. Drandakis, Factor Substitution ..., a.a.O., insbes. S. 219 ff

ist.¹⁾ Ist die vierte dieser Bedingungen gegeben, so ist das Zwei-Sektoren-Modell mit dem Ein-Sektor-Modell äquivalent.²⁾

Aus diesen verschiedenen (hinreichenden) Existenzbedingungen wird unmittelbar klar, daß die Frage der Existenz eines langfristigen Gleichgewichts durchaus nicht so sicher ist, wie das auf Grund des Studiums von Ein-Sektor-Modellen der Fall zu sein schien. Noch unsicherer scheint, wie im folgenden gezeigt werden soll, ein realisierbares langfristiges Gleichgewicht jedoch dann zu sein, wenn man sich die Bedingungen für die Stabilität eines solchen Gleichgewichts vor Augen hält.

1) Dies ist auch der Grund dafür, weshalb in den Zwei-Sektoren-Modellen von Meade, Kurz und König das Problem der Existenz eines langfristigen Gleichgewichts nicht auftritt. Vgl. J. E. Meade, A Neoclassical Theory ..., a.a.O. S. 122 ff; M. Kurz, A Two-Sector Extension of Swan's Model of Economic Growth, in: International Economic Review, Vol. 4 (1963), S. 68 - 79; H. König, Über einige Wachstumsprobleme in Zwei-Sektoren-Modellen bei Faktorsubstitution, in: Beiträge zur Produktions- und Wachstumstheorie, herausgegeben von W. Krelle, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 44, Berlin 1966, S. 27 - 47.

Darüber hinaus zeigt Solow, daß bei Annahme von Cobb-Douglas-Funktionen für jeden Sektor das Zwei-Sektoren-Modell auch immer stabil ist. Vgl. R. M. Solow, Note on Uzawa's Two-Sector Model ..., a.a.O. S. 48 - 50

2) Vgl. E. Burmeister und A. R. Dobell, Mathematical Theories ..., a.a.O. S. 120 und S. 129 Exercise 12

d) Die Bedingungen für die Stabilität eines langfristigen Gleichgewichts im Zwei-Sektoren-Modell

Die Stabilität eines dynamischen Modells, das sich durch eine Differentialgleichung beschreiben läßt, hängt, wie wir am Anfang dieses Kapitels schon ausgeführt haben, vom Verlauf der Phasenlinie ab, denn das Gleichgewicht, das durch die Partikularlösung der Differentialgleichung beschrieben wird, ist dann stabil, wenn die Phasenlinie im Gleichgewicht eine negative Steigung besitzt.¹⁾

In unserem Zwei-Sektoren-Wachstumsmodell liegt nun ein Gleichgewicht dann vor, wenn in Differentialgleichung (55) $\dot{k} = 0$ ist, wenn also gilt

$$\frac{\dot{k}}{k} = h(k) = f'_1(k_1) \cdot \frac{s_r \cdot k + s_w \cdot \omega}{k} - n = 0 \quad (62)$$

Berücksichtigt man in dieser Gleichung die Gleichgewichtsbedingung $I = S$ aus dem Gleichungssystem (57), so ist $h(k) = 0$, wenn

$$\frac{\lambda \cdot f_1(k_1)}{k} - n = 0$$

ist, bzw. wenn gilt

$$\lambda = n \cdot \frac{k}{f_1(k_1)} \quad (63)$$

Die Lösung dieser Gleichung sei k^* . Dann ist k^* lokal stabil, wenn $h'(k^*) < 0$ ist.

Durch Ableitung von (62) erhält man für $h'(k)^{2)}$

1) Existieren mehrere Partikularlösungen, d. h. mehrere Gleichgewichte, so ist bei einem negativen Verlauf der Phasenlinie in einem dieser Gleichgewichte zunächst nur dessen lokale Stabilität gesichert.

2) Beweis:

Es ist

$$h'(k) = f'_1 \cdot \left[\frac{k \cdot (s_r + s_w \cdot \frac{d\omega}{dk}) - (s_r \cdot k + s_w \cdot \omega)}{k^2} \right] + \frac{s_r \cdot k + s_w \cdot \omega}{k} \cdot \frac{df'_1}{dk_1} \cdot \frac{dk_1}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dk}$$

Da $df'_1/dk_1 = f''_1$ und wegen (53b) $dk_1/d\omega = -f_1^2/f_1 \cdot f''_1$ ist, erhält man, wenn man berücksichtigt, daß wegen (54)

$$h'(k) = \frac{f_1'(k_1)}{k} \cdot \left[(s_w - \lambda) \cdot \frac{d\omega}{dk} - \frac{s_w \cdot \omega}{k} \right] \quad (64)$$

Danach ist $h'(k) \geq 0$, je nachdem, ob

$$(s_w - \lambda) \cdot \frac{d\omega}{dk} - \frac{s_w \cdot \omega}{k} \geq 0 \quad (65)$$

ist. Hinreichend für $h'(k) < 0$ ist demnach $(s_w - \lambda) \leq 0$.

Setzt man in diese Bedingung für λ die Lösungsgleichung (63) ein, so erhält man

$$s_w \leq n \cdot \frac{k^*}{f_1(k_1^*)}$$

Da auf Grund von Gleichung (54) für s_w aber auch

$$s_w = \left(\frac{\lambda \cdot f_1(k_1)}{f_1'(k_1)} - s_r \cdot k \right) \cdot \frac{1}{\omega}$$

geschrieben werden kann, erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (53) für $s_w - \lambda$ auch

$$s_w - \lambda = \frac{1}{\omega} \cdot (\lambda \cdot k_1 - s_r \cdot k)$$

Setzt man für λ wieder die Lösungsgleichung (63) ein, so ist $(s_w - \lambda) \leq 0$ auch für

$$s_r \geq n \cdot \frac{k_1^*}{f_1(k_1^*)}$$

Hinreichend für $h'(k^*) < 0$ und damit für die lokale Stabilität des langfristigen Gleichgewichts k^* ist demnach entweder

$$\frac{s_w}{n} \leq \frac{k^*}{f_1(k_1^*)} \quad (66)$$

oder

$$\frac{s_r}{n} \geq \frac{k_1^*}{f_1(k_1^*)}$$

Anmerkung 2, Forts.

$(s_r \cdot k + s_w \cdot \omega) = \lambda \cdot f_1 / f_1'$ ist, für $h'(k)$

$$h'(k) = f_1' \cdot \left[\frac{s_w \cdot \frac{d\omega}{dk}}{k} - \frac{s_w \cdot \omega}{k^2} \right] - \frac{\lambda \cdot f_1}{f_1' \cdot k} \cdot f_1'' \cdot \frac{f_1'^2}{f_1 \cdot f_1''} \cdot \frac{d\omega}{dk}$$

bzw. nach einigen Umformungen Gleichung (64)

Ist darüber hinaus eine der folgenden Bedingungen

1. $s_r \geq s_w$ und $k_1 \leq k_2$
2. $\sigma \geq 1$
3. $\sigma_2 \geq 1$ (67)
4. $s_r = 1$ und $J > 0$
5. $s_w = 0$ und $J > 0$

erfüllt, so ist $h'(k)$ für alle k negativ und damit das langfristige Gleichgewicht k^* auch global stabil.¹⁾ Dies ist deshalb der Fall, weil alle fünf Bedingungen von (67) gleichzeitig eine der Existenzbedingungen von (61) sowie auch die Stabilitätsbedingung $s_w - \lambda \leq 0$ erfüllen. Dadurch ist einerseits im gesamten Wertebereich von k die Existenz nur eines Gleichgewichts gewährleistet und andererseits gesichert, daß im gesamten Wertebereich von k $h'(k) < 0$ ist. Aus diesem Grunde strebt k von jedem beliebigen Ausgangspunkt aus auf das eine Gleichgewicht k^* zu, was aber nichts anderes bedeutet, als daß k^* global stabil ist, falls eine der Bedingungen von (67) erfüllt ist.

Sieht man einmal von den sonstigen Existenz- und Stabilitätsbedingungen ab, so ist danach die Existenz eines stabilen Gleichgewichts immer dann gegeben, wenn die Substitutionselastizität im Konsumgütersektor σ_2 oder die gesamt-

1) Vgl. E. Burmeister, The Role ..., a.a.O. S. 199
Wegen der Beweise sei verwiesen auf E. Burmeister, Stability and Causality ..., a.a.O.; E. M. Drandakis, Factor Substitution ..., a.a.O.; K. Inada, On a Two-Sector Model ..., a.a.O.; H. Uzawa, On a Two-Sector Model ... (1961), a.a.O.; derselbe, On a Two-Sector Model.. (1963), a.a.O.

Die globale Stabilität für alle $0 < k < \infty$ unter einer der Bedingungen von (67) ist nur deshalb gesichert, weil wir die Ableitungsbedingungen von Inada vorausgesetzt haben. Setzt man diese nicht voraus, so ist k^* nur lokal stabil, und zwar in dem Bereich $0 < k \leq \bar{k} < \infty$. k und $\bar{k}$ stellen dabei positive endliche Eckwerte dar, die sich auf Grund der Begrenzung von $a \leq \omega \leq b$ ergeben.

Selbstverständlich ergibt sich nur dann ein ökonomisch sinnvolles Gleichgewicht, wenn $s_r > 0$, $n > 0$ und $s_w < 1$ ist, was wir ebenfalls vorausgesetzt haben.

wirtschaftliche Substitutionselastizität σ größer als Eins ist.¹⁾ Die Höhe der Substitutionselastizität spielt demnach im Zwei-Sektoren-Modell sowohl für die Existenz eines Gleichgewichts als auch für dessen Stabilität eine Rolle. Die Höhe der Substitutionselastizität des Kapitalgütersektors σ_1 ist dagegen für die Existenz eines stabilen Gleichgewichts bedeutungslos. Sie spielt zwar für die Existenz eines Gleichgewichts eine gewisse Rolle, falls die Substitutionselastizität des Konsumgütersektors kleiner als Eins ist, da für die Existenz nur einer Gleichgewichtslösung die Bedingung $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 1$ hinreichend ist, für die Stabilität dieser einen Lösung ist sie dagegen völlig bedeutungslos.

1) Dieses Ergebnis erfährt auch durch die Einführung eines technischen Fortschritts in das Zwei-Sektoren-Modell keine wesentliche Änderung, denn die Existenz- und Stabilitätsbedingungen, die sich bei Einführung eines exogenen technischen Fortschritts ergeben, unterscheiden sich nicht wesentlich von den Bedingungen, die wir in unserem obigen Modell ohne technischen Fortschritt aufgezeigt haben. Vgl. A. Takayama, On a Two-Sector Model of Economic Growth with Technological Progress - A Comparative Statics Analysis, in: The Review of Economic Studies, Vol. 32 (1965), S. 251 - 262, und P. A. Diamond, Disembodied Technical Change in a Two-Sector Model, in: The Review of Economic Studies, Vol. 32 (1965), S. 161 - 168.

W. W. Chang gelangt allerdings durch Einführung eines richtungsinduzierten technischen Fortschritts zu dem Ergebnis, daß ein langfristiges Gleichgewicht lokal stabil ist, wenn die Kapitalintensitätsbedingung von Uzawa ($k_1 < k_2$) erfüllt ist und die Substitutionselastizität in jedem Sektor kleiner als Eins ist. Vgl. W. W. Chang, A Two-Sector Model of Economic Growth with Induced Technical Progress, in: The Canadian Journal of Economics, Vol. 3 (1970), S. 199 - 212

e) Beurteilung der Ergebnisse aus dem neoklassischen
Zwei-Sektoren-Modell

Bei der Beurteilung des neoklassischen Zwei-Sektoren-Modells muß man davon ausgehen, daß ökonomische Modelle für die Realität überhaupt nur dann einen Aussagegehalt besitzen können, wenn sie stabil sind oder doch zumindest nicht global instabil sind, womit die Möglichkeit von Grenzyklen noch eingeräumt wird. Denn der Sinn der Bildung von ökonomischen Modellen sollte in erster Linie darin bestehen, einige wichtige Wesenszüge der Wirklichkeit in adäquater Weise zu beschreiben. Um aber beurteilen zu können, ob das Modell dieser Aufgabe auch tatsächlich gerecht wird, muß es empirisch überprüfbar sein und einer Konfrontation mit der Wirklichkeit standhalten. In der Realität werden nun aber nur solche Zusammenhänge zu beobachten sein, die von dauerhaftem Zustand sind, oder aber Bewegungen, die irgendwie auf einen dauerhaften Zustand hinstreben. Solche Zustände werden in der ökonomischen Theorie durch das Modellbild des stabilen Gleichgewichts beschrieben. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, in der Wirklichkeit einen sogenannten instabilen Zustand zu beobachten, der nur per Zufall eingetreten sein kann und der bei der geringsten Veränderung exogener Größen wieder verschwindet, äußerst gering. Sie ist im Prinzip genauso gering wie die Wahrscheinlichkeit, auf der Erde Spuren von stark zerfallsaktiven Elementen mit sehr kleiner Halbwertszeit zu finden.¹⁾

Auf Grund dieser Überlegungen hält der Verfasser Zusammenhänge, wie sie in instabilen Modellen beschrieben werden, vom theoretischen Standpunkt aus zwar nicht für völlig unmöglich, sondern für durchaus denkbar, doch dürften sie durch empirische Beobachtungen kaum zu beweisen sein. Außerdem sind die Lösungen solcher Modelle zur Erklärung der Wirklichkeit nicht geeignet, da in der Realität eben nur

1) Bekanntlich ist es gelungen, durch radioaktive Bestrahlung Spuren von Elementen zu erzeugen und nachzuweisen, deren Atomkerne nur Bruchteile von Sekunden existenzfähig sind und danach sofort zerfallen. Solche Elemente dürfte man in der freien Natur aber wohl kaum auffinden, da sie praktisch nur 'in statu nascendi' angetroffen werden können.

stabile Gleichgewichte oder Bewegungen auf diese hin anzutreffen sein werden. Deshalb können zur Erklärung der Realität nur ökonomische Modelle mit stabilen Gleichgewichtslösungen herangezogen werden.

Das vorliegende Zwei-Sektoren-Modell ist nun aber, wie wir nachgewiesen haben, nur unter ganz bestimmten, recht einschränkenden Bedingungen stabil. Es fragt sich deshalb, inwieweit es fähig ist, als adäquates Abbild der Wirklichkeit zu gelten. Um als solches gelten zu können, müßte zunächst nachgewiesen werden können, daß aus ökonomischen Verhaltensweisen heraus zumindest eine der Stabilitätsbedingungen immer gegeben ist. Dieser Nachweis ist bisher nicht gelungen. Zur Erklärung der Wirklichkeit ist daher das vorliegende Zwei-Sektoren-Modell nur unter Vorbehalt geeignet.

Ungeachtet der empirischen Relevanz des Zwei-Sektoren-Modells wirft dieses Ergebnis aber auch einige Fragen theoretischer Art auf.

Zunächst muß in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen werden, daß wir im Laufe dieser Arbeit verschiedene Indizien dafür gefunden zu haben glaubten, daß die Substitutionselastizität wohl kleiner als Eins sein müsse. Diese These ergab sich einmal aus den verteilungstheoretischen Implikationen der neoklassischen Theorie. Es konnte nämlich gezeigt werden, daß wenn die Kapitalisten ihren Kapitalstock so wählen, daß die Elastizität $\epsilon = - \frac{dr}{dK} \cdot \frac{K}{r}$ gerade gleich Eins wird, die Verteilungsrelation P/W allein von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig ist, und zwar in der Form $P/W = (1-\sigma)/\sigma$. Lohn- und Profitquote nehmen in diesem Fall die Werte $1-\sigma$ und σ an. Da aber beide Quoten nur positiv sein können, muß die Substitutionselastizität kleiner als Eins sein. In diesem Fall stellt diese Situation ein makroökonomisches Profitmaximum dar.

Zum anderen spricht für die These, daß σ kleiner als Eins sein muß, auch das Ergebnis, daß das langfristige Gleichgewicht bei Harrod-neutralem Fortschritt, das durch Beobachtungen der Realität tendenziell bestätigt wird, in dem all-

gemeinen Fall, in dem man die technische Fortschritts-
grenze im Sinne des augmenting-Konzepts des technischen
Fortschritts von David und van de Klundert interpretiert,
nur stabil ist, falls die Substitutionselastizität kleiner
als Eins ist. Es ist dagegen instabil, wenn $\sigma > 1$ ist.

Wenn wir jetzt im Fall eines Zwei-Sektoren-Modells finden,
daß eine Bedingung für dessen Stabilität die Voraussetzung
ist, daß die gesamtwirtschaftliche Substitutionselastizität
oder die des Konsumgütersektors größer als Eins ist, so
sprechen die obigen Implikationen gegen eine Stabilität
des Zwei-Sektoren-Modells.

Ernster als der Einwand, daß das Zwei-Sektoren-Modell mit
hoher Wahrscheinlichkeit nicht stabil ist (denn auch die
Kapitalintensitätsbedingung $k_1 < k_2$ ist nicht gerade sehr
realitätsnah), scheint dem Verfasser die Tatsache zu sein,
daß selbst unter der Voraussetzung, daß die Produktionstech-
nik in den einzelnen Sektoren durch neoklassische Produk-
tionsfunktionen beschrieben werden kann, für die gesamte
Volkswirtschaft nur noch unter ganz speziellen Bedingungen
eine neoklassische Produktionsfunktion ermittelt werden
kann. Dies ist nämlich nur in den Fällen möglich, in denen
sich zwischen der Lohn-Zins-Relation ω und der gesamtwirt-
schaftlichen Kapitalintensität k eine streng monotone Funk-
tionalbeziehung mit positiver Steigung ergibt. Notwendig
und hinreichend dafür ist, daß die Determinante J der Ko-
effizientenmatrix des Gleichungssystems (58) positiv ist,
was aber nur gesichert ist, wenn eine der Bedingungen von
(61) gegeben ist.

Ist dagegen J nicht für den gesamten Wertebereich von k
und ω positiv, so ist die Funktionalbeziehung zwischen ω und
 k nicht mehr streng monoton mit positiver Steigung. Das be-
deutet aber nichts anderes, als daß die gesamtwirtschaftliche
Substitutionselastizität $\sigma = \frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\omega}{k}$ auch negative Werte an-
nehmen kann. Dies ist aber, wie wir eingangs gesehen haben,
mit den neoklassischen Annahmen nicht vereinbar. Eine ge-
samtwirtschaftliche neoklassische Produktionsfunktion kann
in diesem Fall daher nicht mehr ermittelt werden.

Diese Tatsache ist um so erstaunlicher, als wir gerade für die einzelnen Sektoren, die im Extremfall auch mit den einzelnen Unternehmen zusammenfallen können, neoklassische Produktionsannahmen unterstellt haben. Überträgt man die aus dem Zwei-Sektoren-Modell abgeleiteten Implikationen auf das Verhältnis Mikro- versus Makroökonomie - was zulässig sein dürfte, da man sich ja eine Volkswirtschaft mit zwei Einzelunternehmen vorstellen kann oder da man annehmen kann, daß bei Unterteilung einer Volkswirtschaft in so viele "Sektoren", wie Einzelunternehmen existieren, die Existenzbedingungen eher noch enger und restriktiver sind als im Zwei-Sektoren-Modell - so erhebt sich die Frage, ob es zulässig ist, von der Gültigkeit der mikroökonomischen Grenzproduktivitätssätze, die hier als richtig vorausgesetzt werden, ohne weiteres darauf zuschließen, daß im Makrobereich mit steigendem Lohn-Zins-Verhältnis auch immer die Kapitalintensität zunimmt.

Berücksichtigt man schließlich noch, worauf eingangs schon hingewiesen wurde, daß in einer hochindustrialisierten Volkswirtschaft die Einzelunternehmen eine Substitution zwischen Arbeit und Kapital nur auf dem Wege der Verfahrens substitution erreichen können, also durch Ersetzung eines (limitationalen) Produktionsverfahrens durch ein anderes, so fragt es sich, ob das neoklassische Bild einer makroökonomischen Produktionsfunktion mit substitutionalen Faktoren zur Beschreibung der produktions- und verteilungstheoretischen Zusammenhänge in einer modernen Volkswirtschaft hinreichend geeignet ist.

Da wir im Rahmen dieser Arbeit eine wissenschaftliche Theorie wie die hier erörterte neoklassische Theorie aus dem Wissenschaftsverständnis des kritischen Rationalismus heraus beurteilen wollen, muß die Theorie nicht nur logisch konsistent sein, sondern auch einer Konfrontation mit der Realität standhalten. Dazu muß sie aber empirisch überprüfbar sein.

Nachdem wir bisher versucht haben, die neoklassische Theorie über eine gründliche Beleuchtung des neoklassischen Substi-

tutionsparameters, der Substitutionselastizität, auf ihre Aussagefähigkeit und logische Konsistenz hin zu überprüfen, wobei wir gefunden zu haben glauben, daß diese nicht eindeutig gesichert ist, soll im folgenden untersucht werden, inwieweit der Begriff der Substitutionselastizität einer empirischen Schätzung zugänglich ist. Damit soll nicht nur erreicht werden, etwas darüber zu erfahren, wie hoch die Substitutionselastizität nun tatsächlich ist, ob sie konstant ist oder variabel und von welchen Größen ihre Höhe abhängt, sondern es soll damit gleichzeitig eine Basis für weitere empirische Überprüfungen der neoklassischen Theorie geschaffen werden. Denn viele theoretische Implikationen aus dieser Theorie können nur dann einer empirischen Überprüfung unterzogen werden, wenn die Höhe der Substitutionselastizität von anderen unabhängigen Schätzungen her bekannt ist.

V. Kapitel

Ansätze zur Messung der Substitutions- elastizität

1. Einführung

Wie schon aus den eingangs aufgeführten Grundannahmen der neoklassischen Theorie zu erkennen ist, ist die Annahme substitutionaler Produktionsfaktoren eine der grundlegenden Annahmen der neoklassischen Modellvorstellung. Quantifiziert wird dieses Phänomen der Faktorsubstitution durch den neoklassischen Substitutionsparameter, die Substitutionselastizität. Nachdem im bisherigen Verlauf der Arbeit versucht wurde, die Bedeutung des Prinzips der Faktorsubstitution, ausgedrückt und quantifiziert durch die Höhe der Substitutionselastizität, für das Konzept der Produktionsfunktion sowie für die Verteilungstheorie und die Theorie des Gleichgewichtswachstums eingehend darzustellen, soll nun das Ziel dieses Kapitels darin bestehen, die Höhe der Substitutionselastizität empirisch zu ermitteln. Dabei kann es im Rahmen der vorliegenden Untersuchung natürlich nicht unsere Aufgabe sein, eigene Schätzungen der Substitutionselastizität vorzutragen, noch kann in diesem engen Rahmen eine erschöpfende Darstellung und Diskussion der mit der Schätzung der Substitutionselastizität verbundenen Probleme dargeboten werden.¹⁾ Vielmehr wollen wir uns an dieser Stelle darauf beschränken, einige wichtige Ansätze zur Messung der Substitutionselastizität vorzustellen und kritisch zu beleuchten sowie einige mit Hilfe dieser Ansätze gewonnenen Meßergebnisse anzuführen, um auf diese Weise eine gewisse Vorstellung über die Größenordnung der

1) Eine ausführliche Diskussion dieser Probleme aus dem Wissenschaftsverständnis des kritischen Rationalismus heraus findet sich bei B. Gahlen, Der Informationsgehalt der neoklassischen Wachstumstheorie für die Wirtschaftspolitik (Die Einheit der Gesellschaftswissenschaften, Bd. 12, Herausgeber E. Boettcher), Tübingen 1972

Substitutionselastizität zu vermitteln. Dabei werden wir sehen, daß die Schätzwerte für die Substitutionselastizität nicht nur zwischen verschiedenen Branchen beträchtlich divergieren, sondern auch für ein und dieselbe Branche oft recht große Unterschiede aufweisen. Völlig vernachlässigen müssen wir im Rahmen dieser Arbeit die Erörterung all jener Schwierigkeiten und Probleme, die mit der Erfassung und Aufbereitung des für die Schätzung benötigten Zahlenmaterials verbunden sind. Deshalb können wir hier auch nicht untersuchen, inwieweit Divergenzen bei den geschätzten σ -Werten auf derartige Einflüsse zurückzuführen sind. Dagegen wollen wir versuchen zu erklären, inwieweit die Schätzwerte für die Substitutionselastizität durch die Verwendung unterschiedlicher Meßansätze systematisch in einer Richtung beeinflußt werden.

2. Die Schätzung der Substitutionselastizität mit Hilfe von Querschnittsanalysen

Versuche zur direkten Schätzung der Substitutionselastizität wurden praktisch erst mit der Einführung der CES-Funktion möglich. Denn die bis dahin in ökonomischen Modellen verwendeten Produktionsfunktionen, die Leontief-Funktion und die Cobb-Douglas-Funktion, lassen beide keine direkte Schätzung der Substitutionselastizität zu, denn sie gehen von einfachen Hypothesen über den Grad der Faktorsubstitution aus. So wird in der Leontief-Funktion eine Substitutionselastizität von Null und in der Cobb-Douglas-Funktion eine solche von Eins unterstellt. Erst in der zuerst von ACMS 1961 entwickelten CES-Funktion erscheint der Substitutionsparameter explizit und kann daher über einen Regressionsansatz direkt geschätzt werden.¹⁾

Diesen Regressionsansatz erhält man am einfachsten, wenn man die CES-Funktion

$$Y = [a \cdot K^{-\sigma} + b \cdot N^{-\sigma}]^{-1/\sigma} \quad (\text{II.13})$$

nach N partiell ableitet.²⁾ Man erhält dann

$$f_N = w = b \cdot \left(\frac{Y}{N} \right)^{1+\sigma}$$

bzw. $\frac{Y}{N} = b^{-1/(1+\sigma)} \cdot w^{1/(1+\sigma)}$

Logarithmiert man diese Gleichung und berücksichtigt, daß $1/(1+\sigma) = \sigma$ ist, so erhält man

$$\log \left(\frac{Y}{N} \right) = -\sigma \cdot \log b + \sigma \cdot \log w$$

Ersetzt man in dieser Beziehung $-\sigma \cdot \log b$ durch $\log \alpha$, so erhält man den Regressionsansatz

1) Vgl. ACMS, a.a.O.

2) In der Herleitung des folgenden Regressionsansatzes folgen wir H. Frisch. Vgl. H. Frisch, Die CES-Funktion, a.a.O. S. 427. ACMS gingen umgekehrt von der Beobachtung aus, "that the value added per unit of labor used within a given industry varies across countries with the wage rate", und leiteten aus der so gefundenen Regressionsgleichung die CES-Funktion ab. Vgl. ACMS, a.a.O. S. 225

$$\log \left(\frac{Y}{N} \right) = \log \alpha + \sigma \cdot \log w + \epsilon \quad (1)$$

in dem $\log \alpha$ und σ als Regressionskoeffizienten auftreten und ϵ eine Fehlervariable mit dem Mittelwert 0 ist. Der Lohnsatz w läßt sich auf Grund der Beziehung

$$w = \frac{w \cdot N}{Y} \cdot \frac{Y}{N} = (1-u) \cdot \frac{Y}{N}$$

ohne große Schwierigkeiten berechnen.¹⁾

Geht man nun davon aus, daß das technische Wissen in allen Ländern gleich ist, so läßt sich mit Hilfe dieses Regressionsansatzes eine Querschnittsanalyse durchführen und so auf einfache Weise mittels der Methode der kleinsten Quadrate die (internationale) Substitutionselastizität der verschiedensten Branchen berechnen.

ACMS berechneten auf diese Weise die (internationale) Substitutionselastizität für 24 Branchen und fanden dabei Werte für σ zwischen 0,7211 und 1,0114. Minhas unterwarf die geschätzten σ -Werte einem Signifikanztest (t-Test) und stellte dabei fest, daß in 14 der 24 Industrien die Substitutionselastizität mit einer Sicherheit von 90 % signifikant von 1 verschieden ist und in gar allen 24 Industrien mit einer Sicherheit von 99 % signifikant von 0 verschieden ist.²⁾ Auf Grund ihrer Schätzergebnisse halten ACMS daher für erwiesen, "that the elasticity of substitution between capital and labor in manufacturing may typically be less than unity."³⁾

Die Schätzmethode von ACMS, die in der Literatur großen Anklang gefunden hat, setzt allerdings voraus, daß die Produktionsverhältnisse einer bestimmten Branche weltweit tatsächlich durch eine einzige Produktionsfunktion charakterisiert werden können, d. h. sie unterstellt, daß zwischen

1) Vgl. B. Gahlen, Die Überprüfung produktionstheoretischer Hypothesen für Deutschland (1850 - 1913). Eine kritische Untersuchung, Tübingen 1968, S. 130, Anm. 1

2) Vgl. B. S. Minhas, An International Comparison of Factor Costs and Factor Use; Contributions to Economic Analysis, Bd. 31, Amsterdam 1963, S. 23 f

3) Siehe ACMS, a.a.O. S. 246

den in den verschiedenen Ländern realisierten Produktionsprozessen keine Effizienzunterschiede existieren,¹⁾ oder aber es werden "neutrale" Effizienzunterschiede vorausgesetzt, die nur die Lage der Isoquanten der einzelnen Länder in bezug auf den Koordinatenursprung beeinflussen, nicht aber die Gestalt der Isoquante selbst.²⁾ Das Verfahren von ACMS zur Schätzung der Substitutionselastizität setzt also voraus, daß entweder kein technischer Fortschritt existiert oder daß der technische Fortschritt Hicks-neutral ist.

Da realistischerweise davon ausgegangen werden muß, daß technischer Fortschritt existiert, tauchen insbesondere bei Schätzungen der Substitutionselastizität mit Hilfe von Zeitreihen nicht unerhebliche Probleme auf. Trotz dieser Schwierigkeiten wurden auf der Basis einer CES-Funktion mit Hicks-neutralem Fortschritt zahlreiche Messungen der Substitutionselastizität vorgenommen.

So fand Minasian 1961 auf Grund einer Querschnittsanalyse bei einer Untersuchung von 14 Industriezweigen Substitu-

1) Diese Annahme wird von V. R. Fuchs wohl mit Recht angezweifelt. Fuchs unterteilt daher die von ACMS in die Untersuchung einbezogenen Länder in Entwicklungsländer und entwickelte Länder. Nun berechnete er für jede Branche nach Ländergruppen getrennt die Substitutionselastizität. Als Ergebnis erhielt Fuchs durchweg höhere Substitutionselastizitäten, nämlich für Gruppe I einen σ -Mittelwert (Median) von 1,02 und für Gruppe II einen solchen von 1,15. In fast allen Fällen ist die Substitutionselastizität nicht signifikant von 1 verschieden. Fuchs führte außerdem eine Schätzung mit nur einer Regressionsgleichung durch, die aber eine "shift"-Variable enthält, die den Niveauunterschied zwischen beiden Ländergruppen erfassen soll. Auch in diesem Fall erhält er durchweg höhere Substitutionselastizitäten. Ihr Median liegt bei 1,04. Vgl. V. R. Fuchs, Capital Substitution. A Note, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 45 (1963), S. 436 - 438.

Eine kritische Beurteilung der Methode und der Ergebnisse von Fuchs findet sich bei M. Nerlove, Recent Empirical Studies of the CES and Related Production Functions, in: The Theory and Empirical Analysis of Production, edited by M. Brown, National Bureau of Economic Research, New York, London 1967, S. 55 - 122, insbesondere S. 66 ff

2) Wie aus ihren Ausführungen deutlich wird, gehen ACMS von dieser Annahme aus. Vgl. ACMS, a.a.O. S. 246

tionselastizitäten zwischen 0,31 und 3,46. In 7 Fällen war die Substitutionselastizität kleiner als Eins, in 6 Fällen war sie größer als Eins und in einem Fall war sie mit -0,54 negativ.¹⁾

Ebenfalls auf Grund einer Querschnittsanalyse berechnete Solow 1964 für 19 Wirtschaftszweige die Substitutionselastizitäten und fand dabei Werte zwischen 0,06 und 1,96. In 9 Fällen war σ kleiner als Eins und in 10 Fällen größer als Eins.²⁾

Eine recht interessante Untersuchung stammt von Dhrymes, der 1965 die Substitutionselastizitäten von 16 Industriezweigen auf Grund der beiden folgenden verschiedenen Schätzgleichungen berechnete:³⁾

$$\log \left(\frac{Y}{N} \right) = \log a_1 + \sigma \cdot \log w + \varepsilon_1 \quad (\text{Regressionsansatz I})$$

$$\log \left(\frac{Y}{K} \right) = \log a_2 + \sigma \cdot \log r + \varepsilon_2 \quad (\text{Regressionsansatz II})^4)$$

(2)

Wenn das durch die ACMS-Funktion beschriebene produktionstheoretische Modell richtig wäre, so Dhrymes, dürfte die Substitutionselastizität in beiden Fällen nicht signifikant verschieden sein. Dhrymes kommt jedoch zu dem Ergebnis, daß die mit Hilfe des Ansatzes II geschätzten σ -Werte durchweg erheblich über den entsprechenden, auf Grund der ersten Methode berechneten σ -Werte liegen. Während sich auf Grund des ersten Regressionsansatzes Substitutionselastizitäten zwischen 0,113 und 0,950 ergeben, ergeben sich auf Grund des zweiten Regressionsansatzes σ -Werte zwischen

1) Vgl. J. R. Minasian, Elasticities of Substitution and Constant Output Demand Curves for Labor, in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961), S. 261 - 270

2) Vgl. R. M. Solow, Capital, Labor and Income in Manufacturing, in: The Behavior of Income Shares. Selected Theoretical and Empirical Issues, edited by C. L. Schulze und L. Weiner, National Bureau of Economic Research, Princeton 1964, S. 101 - 128

3) Vgl. P. J. Dhrymes, Some Extensions and Tests for the CES-Class of Production Functions, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 357 - 366

4) Dieser Regressionsansatz ergibt sich aus

$$r = \sqrt[1+\sigma]{Y \cdot \left(\frac{Y}{K} \right)}$$

0,24 und 1,394.¹⁾ Im Durchschnitt ist der mit Hilfe der zweiten Methode berechnete σ -Wert fast doppelt so hoch wie der entsprechende, nach der ersten Methode berechnete Wert.

Ebenfalls interessante Aufschlüsse liefert eine Untersuchung von Murata und Arrow.²⁾ Murata und Arrow berechneten 1965 die (internationalen) Substitutionselastizitäten von 12 Branchen für zwei verschiedene Zeitpunkte, und zwar aus Daten von 1953 - 56 und Daten von 1957 - 59, und fanden dabei σ -Werte zwischen 0,66 und 1,025. Diese Untersuchung erlaubt erste Schlüsse darüber, ob die in der CES-Funktion auch im Zeitablauf als konstant angenommene Substitutionselastizität tatsächlich in etwa konstant ist oder nicht. Das Ergebnis von Murata und Arrow zeigt nur in einem Fall eine Abweichung von mehr als 20 % zwischen den beiden σ -Werten einer Branche und nur in 2 Fällen eine Abweichung zwischen 10 % und 20 %. Die Substitutionselastizitäten waren demnach in dem betrachteten Zeitraum erstaunlich konstant.

1) Vgl. P. J. Dhrymes, Some Extensions ..., a.a.O.

2) Vgl. Y. Murata und K. J. Arrow, Unpublished Results of Estimation of Elasticities of Substitution for Two-digit Industries from Inter-country Data for two Periods, Juni 1965, zusammengefaßt bei M. Nerlove, Recent Empirical Studies ... a.a.O. S. 64 f

3. Die simultane Messung von Substitutionselastizität und Hicks-neutralem technischem Fortschritt mit Hilfe von Zeitreihenanalysen

Erheblich zahlreicher als mit Hilfe von Querschnittsanalysen¹⁾ wurde die Substitutionselastizität mit Hilfe von Zeitreihen geschätzt. Mit dieser Methode ist es nicht nur möglich, die Substitutionselastizitäten einzelner Industriezweige und Branchen zu schätzen, sondern es besteht auch die Möglichkeit, die gesamtwirtschaftliche Substitutionselastizität zu messen.

Besondere Schwierigkeiten bereitet bei dieser Schätzmethode der technische Fortschritt. Denn wie wir an anderer Stelle dieser Arbeit schon gezeigt haben, hängen die Grenzproduktivitäten von Arbeit und Kapital und damit auch die Faktorpreise nicht nur von den Einsatzmengen der Faktoren, sondern auch vom technischen Fortschritt ab. Damit wird aber auch umgekehrt die Kapitalintensität nicht nur von der Faktorpreisrelation, sondern auch vom technischen Fortschritt beeinflußt. Will man nun aber den Effekt einer Änderung der Faktorpreisrelation auf die Kapitalintensität isoliert erfassen, so muß demnach der Effekt, den ein technischer Fortschritt auf die Kapitalintensität ausübt, eliminiert werden. In Kenntnis dieses Problems haben ACMS eine Regressionsgleichung entwickelt, die eine simultane Schätzung der Substitutionselastizität und des technischen Fortschritts erlaubt, sofern man nur annimmt, daß dieser Hicks-neutral ist.

Diese Regressionsgleichung erhält man folgendermaßen:
Da im Falle der ACMS-Funktion für die Lohnquote gilt

$$\frac{w \cdot N}{Y} = (1-\sigma) \cdot \left(\frac{Y}{\sigma N}\right)^{\sigma}$$

und für den Lohnsatz

$$w = (1-\sigma) \gamma^{-\sigma} \left(\frac{Y}{N}\right)^{1+\sigma}$$

1) Eine weitere Querschnittsanalyse stammt von Ferguson, deren Schätzergebnisse jedoch nicht im einzelnen veröffentlicht wurden. Vgl. C. E. Ferguson, Cross-Section Production Functions and the Elasticity of Substitution in American Manufacturing Industry, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 45 (1963), S. 305 - 313

erhält man, wenn man die zweite Beziehung nach Y/N auflöst und in die erste Gleichung einsetzt sowie ϱ durch σ ersetzt, die Beziehung

$$\frac{w \cdot N}{Y} = (1-\sigma) \left(\frac{w}{\gamma} \right)^{1-\sigma}$$

oder logarithmiert

$$\log \left(\frac{w \cdot N}{Y} \right) = \sigma \cdot \log (1-\sigma) + (1-\sigma) \cdot \log w + (\sigma-1) \cdot \log \gamma$$

Nimmt man nun an, daß der technische Fortschritt mit der konstanten Rate λ eintritt, so vereinfacht sich diese Beziehung zu dem Regressionsansatz¹⁾

$$\log \left(\frac{w \cdot N}{Y} \right) = a_0 + a_1 \cdot \log w + a_2 \cdot t \quad (3)$$

$$\text{mit } a_0 = \sigma \cdot \log (1-\sigma) + (\sigma-1) \cdot \log \gamma_0$$

$$a_1 = 1-\sigma$$

$$a_2 = -\lambda \cdot (1-\sigma)$$

Aus diesem Ansatz kann aus den geschätzten Werten für a_1 und a_2 leicht die Substitutionselastizität und die Rate des technischen Fortschritts ermittelt werden.

ACMS erhielten auf diese Weise für die amerikanische Wirtschaft für die Zeit von 1909 - 1949 eine Substitutionselastizität von 0,569 und eine jährliche Fortschrittsrate in Höhe von 1,83 %.²⁾

Dieses Resultat zeigt eine erstaunliche Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Kravis, der für Amerika für die Zeit zwischen 1900 und 1957 eine gesamtwirtschaftliche Substitutionselastizität von 0,64 ermittelte.³⁾ Zu diesem Wert gelangte Kravis, indem er für 1900 - 1909 und 1949 - 1957 sowohl die Kapitalintensität als auch das Faktorpreisverhältnis ermittelte und dann die Substitutionselastizität nach der Formel

$$\sigma = - \frac{\left(\frac{K}{N} \right)_{1949-57} - \left(\frac{K}{N} \right)_{1900-09} \cdot \left(\frac{r}{w} \right)_{1900-09} + \left(\frac{r}{w} \right)_{1949-57}}{\left(\frac{r}{w} \right)_{1949-57} - \left(\frac{r}{w} \right)_{1900-09} \cdot \left(\frac{K}{N} \right)_{1900-09} + \left(\frac{K}{N} \right)_{1949-57}} \quad (4)$$

1) Vgl. ACMS, a.a.O. S. 244

2) Ebenda S. 244

3) Vgl. J. Kravis, Relative Income Shares ..., a.a.O. S. 940

berechnete.

Mit der gleichen Methode wie ACMS gelangte Diwan 1963 durch Untersuchung des Zeitraumes von 1919 - 1958 zu einer gesamtwirtschaftlichen Substitutionselastizität von 0,37, mit einem etwas anderen Regressionsansatz dagegen auf 0,68.¹⁾ Zu seinem alternativen Regressionsansatz gelangt man, wenn man die Lohn-Zins-Relation

$$\frac{w}{r} = \left(\frac{1-\sigma}{\sigma} \right) \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{1+\sigma}$$

nach K/N auflöst. Man erhält dann

$$\frac{K}{N} = \left(\frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{w}{r} \right)^{\frac{1}{1+\sigma}}$$

und daraus die Regressionsgleichung

$$\log \left(\frac{K}{N} \right) = \log a + \sigma \cdot \log \left(\frac{w}{r} \right) + \varepsilon \quad (5)$$

mit $a = \left(\frac{\sigma}{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1+\sigma}}$

Ebenfalls wie Kravis direkt aus der Definitionsgleichung von σ bildeten schließlich Kendrick und Sato eine Gleichung zur Schätzung der Substitutionselastizität.²⁾ Nach Kendrick und Sato ist nämlich

$$\sigma = \frac{d \left(\frac{K}{N} \right)}{d \left(\frac{w}{r} \right)} \cdot \frac{\frac{w}{r}}{\frac{K}{N}} = \frac{G_K - G_N}{G_w - G_r} \quad (6)$$

In dieser Beziehung sind G_K und G_N die Wachstumsraten von Arbeit und Kapital und G_w und G_r die Veränderungsraten von Lohn- und Zinssatz. Auf der Basis dieser Relation berechneten sie für die amerikanische Wirtschaft zwischen 1919 und 1960 eine Substitutionselastizität von 0,58.

Bei einer anderen Untersuchung fand Kendrick für die ameri-

1) Vgl. R. K. Diwan, An Empirical Estimate of Constant Elasticity of Substitution Production Function, in: *Econometrica*, Vol. 32 (1964), S. 662 - 663. Die von Diwan gefundenen numerischen Werte befinden sich bei M. Nerlove, a.a.O. S. 93

2) Vgl. J. W. Kendrick und R. Sato, Factor Prices, Productivity and Economic Growth, in: *The American Economic Review*, Vol. 53 (1963), S. 974 - 1003, insbesondere S. 981 und 989

kanische Industrie zwischen 1953 und 1957 eine Substitutionselastizität in Höhe von 0,62.¹⁾

Sowohl bei Kravis als auch bei dem Berechnungsansatz von Kendrick und Sato handelt es sich allerdings nur um eine Annäherung an den wahren σ -Wert, denn in beiden Fällen wird eine Bogenelastizität der Faktorsubstitution berechnet. Außerdem wird auch bei den Berechnungsmethoden von Kravis und von Kendrick und Sato implizit die Annahme eines Hicks-neutralen Fortschritts unterstellt, obwohl weder bei Kravis noch bei Kendrick und Sato eine bestimmte Produktionsfunktion vorausgesetzt wird.

Für Deutschland hat B. Gahlen die gesamtwirtschaftliche Substitutionselastizität geschätzt. Er verwendete ebenfalls den Regressionsansatz von ACMS, wobei er einmal mit vom (Hicks-neutralen) Fortschritt bereinigten Zeitreihen und zum anderen ohne Bereinigung der Zeitreihen direkt rechnete. Im ersten Fall erhielt er je nach Bereinigungsmethode eine historische Substitutionselastizität für den Zeitraum von 1850 - 1913 von 1,2 bzw. 1,1 und bei der direkten Schätzung mit unbereinigten Werten eine solche in Höhe von 1,1.²⁾

Auf Grund des Regressionsansatzes³⁾

- 1) Vgl. J. W. Kendrick, Comment on Solow, in: The Behavior of Income Shares ..., a.a.O. S. 140 - 142
- 2) Vgl. B. Gahlen, Die Überprüfung ..., a.a.O. S. 129 ff, insbesondere S. 131
Der Begriff der 'historischen' Substitutionselastizität stammt von Kravis (vgl. J. Kravis, Relative Income Shares ..., a.a.O. S. 940). Sie steht im Gegensatz zur 'eigentlichen' Substitutionselastizität, die man nur dann erhält, wenn technischer Fortschritt und Substitutionselastizität simultan bestimmt werden.
Vgl. B. Gahlen, Die Überprüfung ..., a.a.O. S. 142.
Ausführlich herausgearbeitet wurden die Unterschiede zwischen der 'historischen' und der 'eigentlichen' Substitutionselastizität von Hesse und Gahlen, vgl. H. Hesse und B. Gahlen, die Beziehungen zwischen eigentlicher und historischer Substitutionselastizität bei technischem Fortschritt, in: Weltwirtschaftliches Archiv Bd. 99 (1967 II), S. 175 - 224, insbes. S. 186 ff
- 3) Diesen Ansatz erhält man, wenn man den Regressionsansatz von Diwan geringfügig umformt.

$$\log \left(\frac{u}{1-u} \right) = \log \left(\frac{1-\sigma}{\sigma} \right) + \xi \log \left(\frac{K}{N} \right) \quad (7)$$

mit dem eine gleichzeitige Schätzung von σ möglich ist, erhält er dagegen für diesen Zeitraum eine Substitutionselastizität von 1,83.¹⁾ Danach lag die historische Substitutionselastizität in Deutschland im betrachteten Zeitraum über 1.²⁾ Sie war, wie Gahlen nachwies, im Laufe der Zeit nicht konstant.³⁾

Für die Bundesrepublik Deutschland fand Gahlen für den Zeitraum 1950 - 1969 bei Annahme eines Hicks-neutralen Fortschritts einen σ -Wert von 0,242 und einen Homogenitätsgrad von 1,027.⁴⁾

Außer diesen Schätzungen der gesamtwirtschaftlichen Substitutionselastizität wurden mit Hilfe von Zeitreihenanalysen auch zahlreiche Messungen der Substitutionselastizität für einzelne Industriezweige durchgeführt, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen werden soll. Erwähnt seien nur die Schätzungen von McKinnon (1962 und 1963), Lucas (1963), Maddala (1963 und 1965), Solow (1964) und Kendrick (1964).⁵⁾

- 1) Vgl. B. Gahlen, Die Überprüfung ..., a.a.O. S. 138
- 2) Zu diesem Schluß gelangt auch Helmstädter auf Grund deduktiver Überlegungen. Vgl. E. Helmstädter, Der Kapitalkoeffizient. Eine kapitaltheoretische Untersuchung, Stuttgart 1969, S. 258 Anm. 2. An anderer Stelle berechnet Gahlen jedoch, daß die "eigentliche" Substitutionselastizität in Deutschland signifikant kleiner als 1 war. Vgl. B. Gahlen, Die Überprüfung ..., a.a.O. S. 171
- 3) Vgl. B. Gahlen, Die Überprüfung ..., a.a.O. S. 131 ff
- 4) Vgl. B. Gahlen, Einige Bemerkungen ..., a.a.O. S. 36
- 5) R. I. McKinnon, Wages, Capital Costs and Employment in Manufacturing: A Model Applied to 1947 - 58 U.S. Data, in: Econometrica, Vol. 30 (1962), S. 501 - 521; derselbe, The CES Production Function Applied to Two-Digit Manufacturing and Three Mining Industries for the United States, unpublished. Die Ergebnisse sind zusammengefaßt bei M. Nerlove, a.a.O. S. 83 ff, insbes. Tabelle 7.
R. E. Lucas, Substitution Between Labor and Capital in U.S. Manufacturing 1929 - 58, unpublished Ph. D. dissertation, University of Chicago 1963. Die Ergebnisse sind zusammengefaßt bei M. Nerlove, a.a.O. S. 83 ff, insbes. Tab. 7
G. S. Maddala, Technological Change in the Bituminous Coal Industry, 1919 - 54, unpublished Ph. D. dissertation, University of Chicago 1963; derselbe, Differential Industry Effects and Differential Factor Effects of Technological Change, Memo. 36, Research Center in Economic Growth, Stanford University, March 1965; beide zusammengefaßt bei

Allen diesen Schätzungen gemein ist die Annahme eines Hicks-neutralen technischen Fortschritts. Außerdem zeigen die Ergebnisse, daß die Werte für die Substitutionselastizität verhältnismäßig stark differieren. Sie unterscheiden sich nicht nur sehr stark von einem Industriezweig zum anderen, sondern divergieren auch bei unterschiedlichen Perioden oft recht stark innerhalb derselben Branche. Sicherlich wird ein beträchtlicher Teil dieser Unterschiede durch die Verwendung verschiedener statistischer Quellen sowie durch die unterschiedliche Aufbereitung des Zahlenmaterials verursacht sein. Daß dies jedoch die großen Unterschiede nicht ausschließlich erklärt, zeigen die Arbeiten, in denen die Substitutionselastizität unter Zugrundelegung desselben Materials auf verschiedene Weise geschätzt wurde. Beispiele dafür geben die Arbeiten von Dhrymes (1965), Murata und Arrow (1965), die allein durch Vertauschung der Variablen in ihrem Regressionsansatz einen Unterschied bei ihren σ -Werten von etwa 10 % erhalten,¹⁾ von Kendrick (1964) und Gahlen (1968). Aus diesen Gründen können die obengenannten Werte für die Substitutionselastizität bestenfalls als grobe Richtwerte angesehen werden, die einen ersten Eindruck von der Größenordnung der Leichtigkeit der Faktorsubstitution zu vermitteln in der Lage sind. Dies ist insbesondere deshalb der Fall, weil aus keiner dieser Untersuchungen hervorgeht, ob der technische Fortschritt tatsächlich neutral war oder nicht. Da der technische Fortschritt in der Realität aber durchaus auch arbeitssparend oder kapitalsparend sein kann, müssen Schätzungen, die von der Annahme eines Hicks-neutralen Fortschritts ausgehen, mit großer Vorsicht beurteilt werden.

Anm. 5, Fortsetzung

M. Nerlove, a.a.O. S. 83 ff

R. M. Solow, Capital, Labor ..., a.a.O.

J. W. Kendrick, Comment on Solow, a.a.O.

1) Vgl. Y. Murata und K. J. Arrow, Unpublished Results ... a.a.O.

4. Die Messung der Substitutionselastizität bei nichtneutralem technischem Fortschritt

Eine Schätzung der Substitutionselastizität ohne die Annahme, daß der technische Fortschritt Hicks- oder Harrod-neutral ist, wurde erst durch ein Schätzverfahren von David und van de Klundert (1965) ermöglicht.¹⁾ Zwar gab es auch vor diesem Verfahren Versuche, sowohl die Substitutionselastizität als auch den Bias des technischen Fortschritts zu messen, doch müssen diese Versuche insgesamt als wenig überzeugend angesehen werden.²⁾

David und van de Klundert gehen bei ihrer Schätzung der Substitutionselastizität von folgender CES-Funktion

$$Y = \left[(AK)^{-\sigma} + (BN)^{-\sigma} \right]^{-1/\sigma}$$

aus, in der sich der technische Fortschritt durch Veränderungen von A und B im Zeitablauf auswirkt. Nach diesem Konzept ist der technische Fortschritt überwiegend kapitalerhöhend, wenn $a > b$ (dabei bedeutet $x = \dot{X}/X$), und überwiegend arbeitserhöhend, wenn $b > a$ ist. Vorwiegend arbeitserhöhender technischer Fortschritt ist jedoch mit einem arbeitssparenden technischen Fortschritt im Sinne von Hicks nur dann identisch, wenn $\sigma < 1$ ist. Umgekehrt ist kapitalerhöhender technischer

1) Vgl. P. A. David und Th. van de Klundert, a.a.O.

2) Vgl. z. B. M. Brown und J. S. de Cani, Technological Change in the United States 1950 - 1960, in: Productivity Measurement Review, Vol. 29 (1962), S. 26 - 39; dieselben, A Measure of Technological Employment, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 45 (1963), S. 386 - 394; dieselben, Technological Change and the Distribution of Income, in: International Economic Review, Vol. 4 (1963), S. 289 - 309; C. E. Ferguson, Time-Series Production Functions and Technological Progress in American Manufacturing Industry, in: Journal of Political Economy, Vol. 73 (1965), S. 135 - 147; derselbe, Substitution, Technical Progress, and Returns to Scale, in: The American Economic Review, Vol. 55 (1965), Papers and Proceedings S. 296 - 305

Fortschritt nur dann kapitalsparend im Sinne von Hicks, wenn $\sigma < 1$.

Wie wir früher gezeigt haben, ergibt sich unter Zugrundelegung dieser Produktionsfunktion für die Einkommensverteilung die Relation

$$\frac{W}{P} = \frac{1-u}{u} = \left(\frac{AK}{BN}\right)^{\sigma}$$

Löst man diesen Ausdruck nach K/N auf und ersetzt σ durch σ , so erhält man

$$\frac{K}{N} = \frac{B}{A} \cdot \left(\frac{1-u}{u}\right)^{\sigma/(1-\sigma)}$$

Nehmen wir nun an, daß der technische Fortschritt die Effizienz der Faktoren Arbeit und Kapital mit konstanten Raten a und b erhöht, so ist

$$\frac{B(t)}{A(t)} = \frac{B(t_0) \cdot e^{bt}}{A(t_0) \cdot e^{at}} = \frac{B_0}{A_0} \cdot e^{(b-a)t}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Beziehung für die Kapitalintensität ein und logarithmiert die ganze Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus, so erhält man folgende Regressionsgleichung

$$\log \left(\frac{K}{N}\right) = \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) \cdot \log \left(\frac{1-u}{u}\right) + (b-a)t + \log \left(\frac{B_0}{A_0}\right) \quad (8)$$

Dieser Regressionsansatz erlaubt bei Verwendung von Zeitreihen für die Kapitalintensität und die Verteilungsrelation eine simultane Schätzung der Substitutionselastizität und der Richtung des technischen Fortschritts, denn der Schätzwert für $b-a$ gibt das Ausmaß des Bias des technischen Fortschritts an.

Mit diesem Ansatz ermittelten David und van de Klundert für die Vereinigten Staaten zwischen 1899 und 1960 eine Substitutionselastizität von 0,32. Außerdem fanden sie, daß während dieser Zeit der technische Fortschritt in Amerika weder Hicks- noch Harrod-neutral war. Vielmehr erhöhte sich die Effizienz des Kapitals um ungefähr 1,5% pro Jahr und die Effizienz der Arbeit um etwa

2,2 bis 2,3 % jährlich.¹⁾ Der technische Fortschritt war also in diesem Jahrhundert in Amerika arbeitssparend im Sinne von Hicks.

Für Deutschland berechnete Gahlen die Substitutionselastizität und die Richtung des technischen Fortschritts auch nach diesem Meßansatz und gelangte dabei für die Zeit zwischen 1858 und 1906 zu einer "tatsächlichen" Substitutionselastizität von 0,2 und zu dem Ergebnis, daß der technische Fortschritt auch in Deutschland überwiegend Hicks-arbeitssparend war. Der Bias b-a betrug in diesem Zeitraum 2,32 % pro Jahr und war damit ungefähr dreimal so hoch wie in Amerika (wo er 0,7 % jährlich betrug).²⁾

Für die BRD fand Gahlen für 1950 - 1969 nach dieser Methode eine Substitutionselastizität von 0,47, einen Abfall der Kapitaleffizienz um 7,4 % jährlich und eine Erhöhung der Arbeitseffizienz um 5,7 % pro Jahr.³⁾ Der arbeitssparende Effekt des technischen Fortschritts betrug demnach in dieser Zeitspanne 13,1 % jährlich, ein vergleichsweise enorm hoher Wert.

Nimmt man für den Fall der CES-Funktion von David und van de Klundert zur Bildung einer Regressionsgleichung

1) Vgl. P. A. David und Th. van de Klundert, a.a.O. S. 360

Den absoluten Wert für a und b kann man aus den Regressionsansätzen berechnen, die man auf Grund der Beziehungen

$$(1-u) = \left(\frac{w}{B}\right)^{1-\sigma}$$

und

$$u = \left(\frac{r}{A}\right)^{1-\sigma}$$

erhält. Die erste Beziehung erhält man, indem man die Ableitung

$$w = B^{-\sigma} \left(\frac{Y}{N}\right)^{1+\sigma}$$

auf beiden Seiten durch w dividiert und nach

$\frac{w \cdot N}{Y} = 1-u$ auflöst. Die zweite Beziehung ergibt sich analog.

2) Vgl. B. Gahlen, die Überprüfung ..., a.a.O. S. 213

3) Vgl. B. Gahlen, Untersuchungen ..., a.a.O. S. 37

nicht die Verteilungsrelation W/P, sondern die Lohn-Zins-Relation

$$\frac{w}{r} = \left(\frac{B(t)}{A(t)} \right)^{-\xi} \cdot \left(\frac{K}{N} \right)^{1+\xi}$$

als Ausgangspunkt, so ergibt sich daraus, wenn man nach K/N auflöst, ξ durch $(1-\sigma)/\sigma$ ersetzt und logarithmiert, folgender alternativer Regressionsansatz

$$\log \left(\frac{K}{N} \right) = (1-\sigma) \cdot \log \left(\frac{B_0}{A_0} \right) + \sigma \cdot \log \left(\frac{w}{r} \right) + (1-\sigma) \cdot (b-a) \cdot t \quad (9)$$

Aus diesem Regressionsansatz ist unschwer zu erkennen, daß, wenn die Substitutionselastizität in Wirklichkeit kleiner als Eins und außerdem der technische Fortschritt in Wirklichkeit überwiegend arbeitserhöhend ist und schließlich die Lohn-Zins-Relation im Laufe der Zeit steigende Tendenz aufweist, die Schätzwerte von σ überhöht sein müssen, wenn man bei der Schätzung von σ a priori einen Hicks-neutralen technischen Fortschritt unterstellt. Denn in diesem Fall wird vorausgesetzt, daß $b-a = 0$ ist, und die in Wirklichkeit diesem Effekt zufallende Wirkung dem Wert von σ in dem Term $\sigma \cdot \log (w/r)$ zugeordnet. Dies erklärt auch die hohen σ -Werte von Kravis, von Kendrick und Sato und von Diwan (die dieser auf Grund seines zweiten Regressionsansatzes erzielte) im Verhältnis zu den niedrigen Werte, die David und van de Klundert und Diwan (mit seiner ersten Methode) fanden. Ebenfalls auf diese Weise lassen sich auch die beträchtlichen Unterschiede erklären, die Gahlen auf Grund seiner verschiedenen Regressionsansätze für die gesamtwirtschaftliche Substitutionselastizität des Deutschen Reiches vor dem Ersten Weltkrieg fand.

Nicht mit der Neutralitätsannahme erklärbar sind dagegen die hohen σ -Werte von ACMS, da in ihrem Regressionsansatz (1) die Hicks-Neutralität des technischen Fortschritts nicht direkt enthalten ist. Sie wird erst dadurch angenommen, daß ACMS die durch ihren Ansatz gefundene Fortschrittsrate als Hicks-neutral interpretieren.

Sie kann jedoch genausogut als neutral im Sinne von Harrod interpretiert werden.¹⁾

Da die Schätzmethode von David und van de Klundert weder einen Hicks- noch einen Harrod-neutralen technischen Fortschritt voraussetzt, verdienen die mit ihrem Berechnungsansatz gewonnenen Ergebnisse zweifellos mehr Vertrauen als alle bisher vorgetragenen Ergebnisse.

Trotzdem kann auch die Methode von David und van de Klundert nicht voll befriedigen. Denn auch sie geht, wie alle bisher vorgestellten Regressionsansätze, von der Annahme aus, daß die Substitutionselastizität im Zeitablauf tatsächlich konstant ist und auch tatsächlich unabhängig von der Höhe der Kapitalintensität ist. Außerdem darf auch nicht übersehen werden, daß "the stipulation that biased factor-augmenting, either labor- or capital-saving, can only proceed at a steady rate through time is admittedly quite restrictive."²⁾ Der wohl ernsteste Einwand gegen diesen Ansatz muß aber darin gesehen werden, daß auch die CES-Funktion von David und van de Klundert einen neutralen technischen Fortschritt impliziert. Und zwar setzt, wie Sato und Beckmann gezeigt haben, die CES-Funktion von David und van de Klundert voraus, daß der technische Fortschritt neutral im Sinne von Beckmann ist.³⁾ Neutral im Sinne von Beckmann ist der technische Fortschritt dann, "wenn die Substitutionselastizität konstant ist, solange die Anteile der Faktoren am Produkt (bei Entlohnung der Faktoren nach dem Grenzprodukt) konstant bleiben",⁴⁾ wenn also $\sigma = \sigma(u)$ ist.

Diese Einwände gegen das Meßkonzept von David und van de Klundert sollen im folgenden eingehender diskutiert und erörtert werden.

1) Vgl. C. E. Ferguson, Time-Series Production Functions ..., a.a.O., und C. E. Ferguson, Substitution ..., a.a.O. S. 299

2) Siehe P. A. David und Th. van de Klundert, a.a.O. S. 365

3) Vgl. R. Sato und M. J. Beckmann, Neutral Inventions .., a.a.O. Die Bezeichnung "Beckmann-Neutralität" stammt übrigens von Krelle. Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 136

4) Siehe W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 136

5. Die Überprüfung der angenommenen Konstanz der Substitutionselastizität mit Hilfe des Konzepts der VES-Funktion

Wie bei der deduktiven Herleitung von Produktionsfunktionen schon ausführlich gezeigt wurde, bereitet es im Prinzip keine Schwierigkeiten, auch von einer variablen Substitutionselastizität auszugehen. Allerdings verbleibt die Produktionsfunktion in diesem Fall auf einem nichtoperationablen Allgemeinheitsgrad. Wie dort jedoch ebenfalls angedeutet wurde, lassen sich wohl operationable und empirisch testbare Funktionen herleiten, wenn man über die Abhängigkeit der variablen Substitutionselastizität bestimmte Hypothesen einführt. Auf diese Weise läßt sich mit Hilfe des Konzepts der VES-Funktion überprüfen, ob die Substitutionselastizität von der Höhe der Kapitalintensität abhängig ist oder nicht und ob σ im Zeitablauf tatsächlich konstant ist oder nicht.

So wurde die Frage, ob sich die Substitutionselastizität im Zeitablauf verändert, von Sato und Hoffman 1968 überprüft.¹⁾ Bei ihrer Untersuchung gingen sie von der Vorstellung aus, daß die Substitutionselastizität zwar nach wie vor von der Kapitalintensität unabhängig ist, daß aber "as time passes, technology advances and results in the enhancement of opportunities for factor substitution."²⁾ Als Hypothese unterstellten sie eine lineare Abhängigkeit der Substitutionselastizität von der Zeit, nämlich $\sigma(t) = a + bt$. Von dieser Hypothese ausgehend, leiteten sie folgende VES-Funktion her:

$$Y = \gamma \left[\lambda \cdot N^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\lambda) \cdot K^{(\sigma-1)/\sigma} \right]^{\sigma/(\sigma-1)}$$

mit $\sigma = a + bt$

Diese VES-Funktion zeigt eine große Ähnlichkeit mit der CES-Produktionsfunktion, jedoch sind in ihr nicht nur γ , sondern auch λ und σ Funktionen der Zeit. Um aus dieser Funktion jedoch einen identifizierbaren Regressionsansatz zu erhalten, nehmen Sato und Hoffman an, daß λ konstant sei.

1) Vgl. R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions ..., a.a.O. S. 457 ff

2) Siehe ebenda, S. 458

Mit dieser Annahme unterstellen sie implizit, daß der technische Fortschritt Hicks-neutral ist. Unter dieser Voraussetzung läßt sich aus obiger Produktionsfunktion folgende Regressionsgleichung gewinnen:

$$\log \left(\frac{Y}{N} \right) = \log m + a \log w + bt \log w \quad (10)$$

in der m , a und b Konstante sind und w der Lohnsatz ist, der gleich dem Grenzprodukt der Arbeit ist.

Bei einem Test dieses Ansatzes für die Vereinigten Staaten und Japan fanden Sato und Hoffman

für Amerika von 1909 - 1960: $\sigma_A = 1,0019 - 0,0028 \cdot t$
und für Japan von 1930 - 1960: $\sigma_J = 0,8060 + 0,0042 \cdot t$

Danach wurde in Amerika die Substitutionselastizität im Laufe der Zeit immer kleiner (sie würde allerdings erst nach über 300 Jahren negativ werden) und in Japan immer größer (sie betrug dort 1960 ungefähr 0,9).

Obwohl nach diesen Ergebnissen eine allgemeine Aussage über die Veränderungsrichtung der Substitutionselastizität im Zeitablauf nicht getroffen werden kann, zeigen sie doch, daß die Annahme einer im Zeitablauf konstanten Substitutionselastizität durchaus willkürlich ist.

In ähnlicher Weise wurde auch die Frage überprüft, ob die Substitutionselastizität von der Kapitalintensität unabhängig ist oder nicht.

Lu und Fletcher verwendeten dazu 1968 einen schon 1965 von Hildebrand und Liu vorgeschlagenen Regressionsansatz, in dem die Wertschöpfung pro Kopf nicht nur vom Lohnsatz abhängig ist, sondern außerdem auch von der Höhe der Kapitalintensität direkt.¹⁾ Als Arbeitshypothese diente ihnen dabei folgende (lineare) Regressionsgleichung:

$$\log \left(\frac{Y}{N} \right) = \log a + b \log w + c \log \left(\frac{K}{N} \right) + \varepsilon \quad (11)$$

in der a , b und c die zu schätzenden Konstanten sind. ε ist eine Fehlervariable mit dem Mittelwert 0. Hildebrand und Liu

1) Vgl. Y. C. Lu und L. B. Fletcher, A Generalization ..., a.a.O., und G. H. Hildebrand und T. C. Liu, Manufacturing Production Functions in the United States, 1957, Ithaca 1965

begründeten diesen Ansatz wie folgt: "If one relies upon the goodness of fit of an empirical relationship as the initial basis for deriving a theoretical one, as Arrow, Chenery, Minhas, and Solow did, one probably would have to consider the three-variable relationship (Y/N , w , and K/N) as better established than the two-variable one (Y/N and w)."¹⁾

Aus diesem Regressionsansatz entwickelten Lu und Fletcher folgende linear-homogene VES-Funktion²⁾

$$Y = \left[\beta K^{-\varphi} + \alpha \eta \left(\frac{K}{N} \right)^{-c(1+\varphi)} \cdot N^{-\varphi} \right]^{-1/\varphi}$$

mit $\varphi = \frac{1}{\sigma} - 1 = \frac{1}{b} - 1$

$$\eta = \frac{1-b}{1-b-c}$$

und $\alpha = a^{-1/b}$

B ist eine Integrationskonstante.

Diese Produktionsfunktion enthält die Cobb-Douglas-Funktion und die CES-Funktion als Spezialfälle, und zwar ergibt sich die CES-Funktion dann, wenn $c = 0$ ist.

Berechnet man für diese Funktion die Substitutionselastizität explizit, so erhält man³⁾

$$\sigma = \frac{b}{1 - c \left(1 + \frac{1}{(B/\alpha) \cdot k^A - B} \right)}$$

wobei $A = \frac{b+c-1}{b}$

- 1) Siehe G. H. Hildebrand und T. C. Liu, Manufacturing Production Functions ..., a.a.O. S. 35
- 2) Diese Funktion erhält man, indem man in (11) für den Lohnsatz w die Beziehung $w = f(k) - k \cdot f'(k)$ setzt, wobei $k = K/N$ ist, und die sich dann ergebende Differentialgleichung löst.
- 3) Diese Beziehung stimmt mit der von Lu und Fletcher angegebenen Formel für σ nicht überein. Das liegt daran, daß der Artikel von Lu und Fletcher mehrere Druckfehler aufweist. Bei Lu und Fletcher steht statt $(B/\alpha) \cdot X^A - B$ fälschlicherweise $B/\alpha(X^A - B)$, wobei ihr X mit unserem k übereinstimmt. Die verschiedenen Druckfehler in ihrem Artikel wurden von Gahlen richtiggestellt.
Vgl. B. Gahlen, Der Informationsgehalt ..., a.a.O. S. 310 Anm. 173

und $B = \frac{c}{b+c-1}$ ist.

Man sieht aus diesem Ausdruck, daß σ eine explizite, nicht-lineare Funktion der Kapitalintensität ist, wobei das Verhalten von σ bei Änderungen von k in erster Linie von dem Schätzwert für c abhängig ist, denn eine Abhängigkeit zwischen σ und k besteht nur, wenn $c \neq 0$ ist.

Lu und Fletcher berechneten die c -Werte für insgesamt 17 Industriezweige und gelangten dabei zu dem Ergebnis, daß je nach gewählter Schätzmethode zwischen 7 und 9 der 17 c -Werte mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % signifikant von Null verschieden sind.¹⁾ Daraus ist zu schließen, daß die Substitutionselastizität im allgemeinen tatsächlich von der Kapitalintensität nicht unabhängig ist und deshalb die auf der Basis der CES-Hypothese ermittelten Schätzwerte für die Substitutionselastizität wahrscheinlich verzerrt sind.

Dieser Schluß aus der Untersuchung von Lu und Fletcher wird durch die Ergebnisse von Sato und Hoffman bekräftigt. Sato und Hoffman gingen in ihrer Untersuchung von der Annahme aus, daß σ im Zeitablauf konstant sei, zwischen σ und der Kapitalintensität k aber eine lineare Abhängigkeit der Form $\sigma(k) = a + bk$ bestehe.²⁾ Von dieser Hypothese ausgehend, leiteten die beiden Autoren eine VES-Funktion her, die folgende Form besitzt:

$$Y = A \cdot K^{a[1/(1+c)]} \cdot \left[N + \left(\frac{b}{1+c} \right) \cdot K \right]^{a[c/(1+c)]}$$

Sie ist homogen vom Grade a . Setzt man voraus, daß die Produktionsfunktion linear-homogen ist, so ist $a = 1$ und die Funktion vereinfacht sich zu der VES-Funktion von Revankar³⁾

1) Vgl. Y. C. Lu und L. B. Fletcher, A Generalization ..., a.a.O. S. 452

2) Vgl. R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions ..., a.a.O. S. 455 ff, und R. Sato, Linear Elasticity of Substitution Production Functions, in: Metroeconomica, Vol. 19 (1967), S. 33 ff

3) Vgl. N. S. Revankar, The Constant and Variable Elasticity of Substitution Production Functions: A Comparative Study

$$Y = A \cdot K^{1/(1+c)} \cdot \left[N + \left(\frac{b}{1+c} \right) \cdot K \right]^{c/(1+c)} \quad (12)$$

in der c eine Integrationskonstante ist.

Eine Möglichkeit zur Schätzung der Parameter A , b und c dieser Produktionsfunktion erhält man, wenn man Gleichung (12) logarithmiert. In diesem Fall ergibt sich

$$\log Y = \log A + \left(\frac{1}{1+c} \right) \cdot \log K + \left(\frac{c}{1+c} \right) \cdot \log \left[N + \left(\frac{b}{1+c} \right) \cdot K \right] \quad (12a)$$

Diese Beziehung kann jedoch nur dann als Regressionsgleichung zur Ermittlung der Regressionskoeffizienten $a_1 = \log A$, $a_2 = 1/(1+c)$ und $a_3 = c/(1+c)$ dienen, wenn $b/(1+c)$ vorher bekannt ist, um aus den Daten für K und N Werte für die Variable $\left[N + b/(1+c) \cdot K \right]$ gewinnen zu können. $b/(1+c)$ muß daher vorher auf andere Weise geschätzt werden.

Eine Möglichkeit zur unabhängigen Schätzung von $b/(1+c)$ erhält man, wenn man die Produktionsfunktion (12) nach K und N ableitet. Für die Grenzproduktivität des Kapitals erhält man in diesem Fall

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \left(\frac{1}{1+c} \right) \cdot \left(\frac{Y}{K} \right) + \left(\frac{1}{1+c} \right) \cdot \left(\frac{b}{1+c} \right) \cdot \frac{Y}{N + \left(\frac{b}{1+c} \right) \cdot K}$$

und für die Grenzproduktivität der Arbeit

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = \left(\frac{1}{1+c} \right) \cdot \frac{Y}{N + \left(\frac{b}{1+c} \right) \cdot K}$$

Setzt man die zweite Beziehung in die erste ein und berücksichtigt, daß bei Entlohnung der Produktionsfaktoren nach ihren Grenzproduktivitäten $\partial Y/\partial K = r$ und $\partial Y/\partial N = w$ ist, so erhält man nach einigen Umformungen die Beziehung

Anm. 3, Fortsetzung

in U. S. Manufacturing Industries, University of Wisconsin Systems Formulation, Methodology and Policy Workshop Paper 6616 (unpublished) 1966.
Zitiert nach R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions ..., a.a.O. S. 456

$$r = \left(\frac{1}{1+c}\right) \cdot \left(\frac{Y}{K}\right) + \left(\frac{b}{1+c}\right) \cdot w \quad (12b)$$

Faßt man diese Beziehung als Regressionsgleichung auf, so kann man auf Grund von Daten für r , w , Y und K die Regressionskoeffizienten $\alpha_1 = 1/(1+c)$ und $\alpha_2 = b/(1+c)$ ermitteln.¹⁾ Setzt man nun den Wert für $\alpha_2 = b/(1+c)$ in Gleichung (12a) ein, so steht einer Schätzung der Produktionsfunktion mit Hilfe der Regressionsgleichung (12a) nichts mehr entgegen.

Wie Sato und Hoffman gezeigt haben, lassen sich für die Schätzung der Funktionsparameter A , b und c auch noch andere Regressionsgleichungen herleiten.²⁾ Sato und Hoffman haben diese verschiedenen Regressionsgleichungen für zwei Länder, die Vereinigten Staaten und Japan, geschätzt und das jeweils beste Ergebnis ausgewählt. Dabei erhielten sie für die für das Verhalten der Substitutionselastizität bei unterschiedlicher Kapitalintensität relevante Größe $q = b/(1+c)$ für die Vereinigten Staaten von 1909 - 1960 den Wert $q_A = -0,0685$ und für Japan für die Zeit zwischen 1930 und 1960 den Wert $q_J = -0,2187$. In beiden Fällen besitzen alle geschätzten Koeffizienten das richtige Vorzeichen und sind statistisch signifikant.

Dieses Schätzverfahren von Sato und Hoffman ist jedoch nicht unangreifbar. Die Angreifbarkeit dieses Schätzverfahrens ergibt sich daraus, daß Sato und Hoffman aus ihrer Hilfsschätzung (Gleichung (12b)) nur den Wert für α_2 in ihre Regressionsgleichung (12a) übernehmen³⁾ und dann die Parameter A und c aus den Regressions-

1) Da für r und w keine direkten Daten zur Verfügung stehen, berechnen auch Sato und Hoffman (wie ACMS) r und w über die Verteilungsquoten. Wegen $u = rK/Y$ ist $r = uY/K$ und wegen $(1-u) = wN/Y$ ist $w = (1-u) \cdot Y/N$. Vgl. R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions ..., a.a.O. S. 457

2) Vgl. R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions ..., a.a.O. S. 457

3) Vgl. ebenda

koeffizienten a_1 , a_2 und a_3 errechnen, obwohl c auf Grund von Gleichung (12b) durch den Wert von α_1 schon eindeutig bestimmt ist. Korrekterweise müßte man die Werte von b und c aus (12b) in (12a) übernehmen und mit Hilfe von Gleichung (12a) nur noch den Niveauparameter A schätzen. Daß dieses falsche Vorgehen von Sato und Hoffman auch zu unrichtigen Ergebnissen führt, sei anhand ihrer Schätzergebnisse für die USA illustriert. Sie erhalten nämlich im Falle der USA für $a_2 = 1/(1+c)$ den Wert 0,2036 ($\pm 0,0778$) und für $a_3 = c/(1+c)$ den Wert 0,9035 ($\pm 0,0770$).¹⁾ Aus a_2 folgt $c = 3,9116$ und aus a_3 $c = 9,3627$, was sich eindeutig widerspricht. Eine zuverlässige Berechnung von b ist unter diesen Umständen nicht möglich und wird selbst von Sato und Hoffman vermieden, die bei ihrer Interpretation nur auf die "richtigen" Vorzeichen hinweisen.

Noch klarer als die Ergebnisse von Lu und Fletcher sowie von Sato und Hoffman bestätigen die Schätzergebnisse von Revankar die VES-Hypothese, daß die Substitutionselastizität von der Höhe der Kapitalintensität nicht unabhängig ist. Revankar schätzte 1967 mit Hilfe von Querschnittsanalysen die VES-Funktionen von 12 ausgewählten amerikanischen Industriezweigen für das Jahr 1957.²⁾ Dabei fand er in 5 dieser 12 Industriezweige eine variable Substitutionselastizität, wobei σ in allen 5 Fällen kleiner als Eins war. Aus seinen Ergebnissen folgt außerdem, daß σ mit zunehmender Kapitalintensität abnimmt, und zwar sowohl in den Branchen der Investitionsgüterindustrie als auch in jenen der Konsumgüterindustrie.³⁾

1) Vgl. R. Sato und R. F. Hoffman, Production Functions ..., a.a.O. S. 457

2) Vgl. N. S. Revankar, Production Functions with Variable Elasticity of Substitution and Variable Returns to Scale, Part I; Discussion Paper Number 7, Economic Research Group, Department of Economics, State University of New York at Buffalo, 1967

3) Vgl. N. S. Revankar, A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions, in: *Econometrica*, Vol. 39 (1971), S. 61 - 71, hier S. 69 f

Für Deutschland wurden verschiedene VES-Funktionen von Gahlen geschätzt.¹⁾ Gahlen schätzte dabei sowohl die VES-Funktion von Sato und Hoffman als auch die von Lu und Fletcher.

Bei der Schätzung einer VES-Funktion vom Sato-Hoffman-Typ für die gesamte deutsche Volkswirtschaft für die Periode 1850 - 1913 erhält Gahlen zwei Alternativlösungen, die beide die tatsächliche Entwicklung mit nur relativ minimalen Abweichungen beschreiben. Im ersten Fall ergibt sich bei einem Homogenitätsgrad von 0,16 (!) und einer (Hicks-neutralen) Fortschrittsrate von 0,6 % p.a. eine Substitutionselastizität von kleiner als Eins. σ nimmt mit zunehmender Kapitalintensität geringfügig ab, und zwar von 0,9931 (1850) bis auf 0,9784 (1913). Im zweiten Fall erhält Gahlen bei einem Homogenitätsgrad von 0,85 und einer jährlichen "Fortschrittsrate" von -0,04 % eine sehr große Substitutionselastizität. Sie steigt mit zunehmender Kapitalintensität beträchtlich an, nämlich von 4,38 (1850) auf 11,60 (1913). Gahlen weist in diesem Zusammenhang auf die Fragwürdigkeit der Schätzung solcher Funktionen hin, da vom ökonometrischen Standpunkt aus keine der beiden Schätzungen den Vorzug verdient. Eine Entscheidung für das "bessere" oder "plausiblere" Ergebnis muß deshalb als recht willkürlich erscheinen.

Bei der Schätzung einer VES-Funktion vom Lu-Fletcher-Typ für die BRD für die Periode 1950 - 1966 erhält Gahlen eindeutig keine CES-Funktion ($c = 0,834$). Trotzdem variiert σ nur geringfügig um den Wert 0,56.

Beide Schätzungen zeigen, daß auch in Deutschland die Substitutionselastizität nicht von der Kapitalintensität unabhängig ist. Doch sind Schlüsse auf die Veränderungsrichtung von σ bei steigender Kapitalintensität wie gerade die erste Schätzung beweist sehr fragwürdig.

1) Vgl. B. Gahlen, der Informationsgehalt ..., a.a.O. S. 302 ff

Nach diesen, mit Hilfe des Konzepts der VES-Funktion gewonnenen Ergebnissen wäre die Substitutionselastizität tatsächlich weder von der Höhe der Kapitalintensität unabhängig noch im Laufe der Zeit konstant. Danach wären auch die von David und van de Klundert gefundenen Schätzergebnisse mit größter Wahrscheinlichkeit noch verzerrt und müßten deshalb ebenfalls noch mit gewisser Vorsicht interpretiert werden.

Dennoch verdienen nach Auffassung des Verfassers diese Ergebnisse keinesfalls mehr Vertrauen als die Schätzwerte von David und van de Klundert. Denn wie schon die einzelnen Ansätze deutlich zeigen, testen die Autoren mit ihren Regressionsansätzen nicht, ob und in welcher Weise die Substitutionselastizität von der Höhe der Kapitalintensität beeinflußt wird und sich im Laufe der Zeit verändert, sondern sie unterstellen durchaus willkürliche Hypothesen über die Art der Abhängigkeit und können durch ihre Tests letztlich nicht mehr als eine Aussage darüber erreichen, ob die von ihnen unterstellte Abhängigkeit in Wirklichkeit vorliegt oder nicht. Natürlich könnte eine solche Kenntnis immerhin einen gewissen Einblick in die wirklich existierenden Abhängigkeiten bedeuten, doch ist nicht einmal dies gesichert. Gahlen hat nämlich nachgewiesen und wir haben im Falle der Schätzung der Sato-Hoffman-Hypothese $\sigma = a+bt$ selbst schon darauf hingewiesen, daß in allen hier vorgeführten Schätzungen der variablen Substitutionselastizität implizit eine Neutralitätsannahme über den technischen Fortschritt unterstellt wird, die in Wirklichkeit, wie die Ergebnisse von David und van de Klundert bewiesen haben, durchaus nicht zuzutreffen braucht.¹⁾

Bei Lu und Fletcher geschieht dies, indem sie zur Schätzung ihrer Parameter α und β (dagegen nicht zur

1) Vgl. B. Gahlen, der Informationsgehalt ..., a.a.O. S. 302 ff

Schätzung des c-Parameters in der Regressionsgleichung (11)) an Stelle dieser Parameter

$$\alpha = (1-\sigma) \cdot \gamma^{-\sigma}$$

$$\beta = \sigma \cdot \gamma^{-\sigma}$$

setzen und annehmen, daß σ konstant sei. Wie man leicht aus der folgenden Beziehung

$$Y = \gamma \left[\sigma \cdot K^{-\sigma} + (1-\sigma) \cdot \eta \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^{-\sigma(1+\sigma)} \cdot N^{-\sigma} \right]^{-1/\sigma}$$

erkennen kann, die man durch Einsetzen von α und β erhält, ist damit implizit die Annahme verbunden, daß der technische Fortschritt Hicks-neutral ist. Durch dieses Verfahren erscheint aber das Ausmaß, in dem σ von k abhängt, verzerrt, sofern der technische Fortschritt in Wirklichkeit nicht Hicks-neutral ist.

Klarer als bei Lu und Fletcher tritt die Neutralitätsannahme bei Sato und Hoffman in Erscheinung. Wie schon erwähnt, impliziert die Annahme $\lambda = \text{const}$ bei der Schätzung der Zeitabhängigkeit von σ einen Hicks-neutralen Fortschritt. Ist nun der technische Fortschritt in Wirklichkeit nicht Hicks-neutral, so muß dies zwangsläufig den Schätzwert von σ verzerren.

Am offensichtlichsten wird die Neutralitätsannahme bei der Schätzung des Ansatzes $\sigma = 1+bk$ durch Sato und Hoffman. Denn schon der Ansatz selbst, aus dem die Produktionsfunktion hergeleitet wird, stellt einen Spezialfall der verallgemeinerten Hicks-Neutralität dar und impliziert damit einen neutralen Fortschritt in diesem Sinn. Dabei versteht man unter verallgemeinerter Hicks-Neutralität des technischen Fortschritts "wenn die Substitutionselastizität der Faktoren Arbeit und Kapital konstant ist, falls die Arbeit-Kapital-Relation konstant bleibt."¹⁾ Da aber die Annahmen

1) Siehe W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 133. Erstmalig eingeführt wurde dieses Neutralitätskonzept von Sato und Beckmann. Vgl. R. Sato und M. J. Beckmann, Neutral Inventions ..., a.a.O. S. 62

eines Hicks-neutralen Fortschritts einschließlich jener der verallgemeinerten Hicks-Neutralität im Vergleich zur von David und van de Klundert verwendeten Beckmann-Neutralität wohl als engere Neutralitätskonzepte angesehen werden müssen, sehen wir keinen Grund, den mit Hilfe des Konzepts der VES-Funktion ermittelten Werten für die Substitutionselastizität ein höheres Vertrauen entgegenzubringen als den von David und van de Klundert ermittelten Werten. Außerdem konnte durch diese Schätzansätze der früher erhobene Vorwurf, daß zur Schätzung der Substitutionselastizität immer eine (Neutralitäts-)Annahme bezüglich des technischen Fortschritts notwendig ist, nicht entkräftet werden. Diesem Einwand wollen wir uns im folgenden zuwenden.

6. Das "Unmöglichkeitstheorem" von Diamond und McFadden

Wie wir oben ausgeführt haben, sind auch die Meßkonzepte von David und van de Klundert, von Sato und Hoffman und von Lu und Fletcher nicht frei von Annahmen über den technischen Fortschritt. Damit verfügen wir aber in keinem der bisherigen Ansätze zur Messung der Substitutionselastizität über ein Konzept, das es uns erlaubt, die Substitutionselastizität und einen nichtneutralen technischen Fortschritt synonym ohne irgendwelche Zusatzannahmen zu messen. Denn alle bisherigen Meßkonzepte enthalten irgendwelche zusätzliche Annahmen über den technischen Fortschritt.

Vor einiger Zeit haben nun Diamond und McFadden mit ihrem "Unmöglichkeitstheorem" ganz allgemein in Frage gestellt, ob es überhaupt möglich ist, sowohl die Form der Produktionsfunktion als auch eine beliebige Form des technischen Fortschritts zu identifizieren.¹⁾ Sie behaupten vielmehr, daß, "... it is, in fact, impossible to measure either the bias or the elasticity of substitution; i. e. given the same time series of all observable market phenomena for a single economy which has a neoclassical production function, these same time series could have been generated by an alternative function having an arbitrary elasticity or arbitrary bias at the observed points."²⁾

Zur Begründung ihres Theorems führen Diamond und McFadden an, daß jede konkrete Situation, für die Daten-

- 1) Vgl. P. A. Diamond und D. McFadden, Identification of the Elasticity of Substitution and the Bias of Technical Change. An Impossibility Theorem, Working Paper Nr. 62, Institute of Business and Economic Research, University of California, Berkeley 1965 (Mimeographed)
- 2) Siehe P. A. Diamond und D. McFadden, Identification ..., a.a.O. S. 1, zitiert nach M. Nerlove, a.a.O. S. 92

material für die Variablen Y, K, N, P und W vorliegt, immer durch mehrere, voneinander verschiedene neoklassische Produktionsfunktionen beschrieben werden kann, sofern man über den technischen Fortschritt nicht irgendwelche zusätzliche Annahmen einführt.¹⁾

Um dies zu zeigen, betrachten wir zwei nicht weiter spezifizierte linear-homogene neoklassische Produktionsfunktionen. Diese Produktionsfunktionen seien mit einem gegebenen Zahlenmaterial dann konsistent, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} 1. \quad Y &= F_1(A_1K, B_1N, t) = F_2(A_2K, B_2N, t) \\ 2. \quad P &= F_{1K}A_1K = F_{2K}A_2K \\ 3. \quad W &= F_{1N}B_1N = F_{2N}B_2N \end{aligned} \quad (13)$$

Trotz ihrer Konsistenz mit dem vorliegenden Zahlenmaterial können die beiden Produktionsfunktionen F_1 und F_2 verschieden sein, vorausgesetzt daß die Kapitalintensität im Laufe der Zeit nicht konstant ist und die Substitutionselastizität in der Realität nicht tatsächlich gerade gleich Eins ist, so daß die Anteile der Faktoren am Volkseinkommen konstant bleiben würden.

Dies läßt sich am einfachsten nachweisen, indem man zeigt, unter welchen Umständen die beiden Funktionen F_1 und F_2 identisch sein müssen. Dazu leiten wir die beiden Produktionsfunktionen nach t ab und erhalten nach einigen Umformungen für die Veränderungsrate des Sozialprodukts

$$\begin{aligned} y &= u \cdot (a_1 + k) + (1-u) \cdot (b_1 + n) + \pi_1 \\ &= u \cdot (a_2 + k) + (1-u) \cdot (b_2 + n) + \pi_2 \end{aligned} \quad (13a)$$

In dieser Beziehung geben die kleinen Buchstaben die Veränderungsrate der entsprechenden großen Buchstaben an, außerdem gilt $\pi_i = F_{it}/Y$ für $i = 1, 2$.

1) Die folgende Darstellung und Beweisführung des "Unmöglichkeitstheorems" folgt im Prinzip den Ausführungen von Nerlove. Vgl. M. Nerlove, a.a.O. S. 92 ff

Da die Verteilungsquoten u und $1-u$ sowie die Veränderungsraten der Faktoren Arbeit und Kapital in beiden Funktionen auf Grund des identischen Zahlenmaterials gleich sind, gilt

$$u \cdot (a_1 - a_2) + (1-u) \cdot (b_1 - b_2) + \pi_1 - \pi_2 = 0 \quad (14)$$

Macht man nun die Annahme, daß kein faktorerhöhender technischer Fortschritt auftritt, sondern sich der gesamte technische Fortschritt ausschließlich in der Restgröße π_1 niederschlägt, so ist $a_1 = a_2 = 0$ und $b_1 = b_2 = 0$ und deshalb $\pi_1 = \pi_2$. Außerdem ist dann $A_1 = A_2 = 1$ und $B_1 = B_2 = 1$, da

$$A_i = A_0 \cdot e^{a_i t} \quad \text{und} \quad B_i = B_0 \cdot e^{b_i t} \quad (i=1,2)$$

ist und man bei Abwesenheit eines faktorerhöhenden technischen Fortschritts $A_0 = 1$ und $B_0 = 1$ setzen kann. Berücksichtigt man diese Beziehungen in der zweiten und dritten Gleichung des Systems (13), so ist unmittelbar zu erkennen, daß die partiellen Ableitungen von F_1 und F_2 identisch sind und deshalb auch die Produktionsfunktionen F_1 und F_2 selbst identisch sind.

Setzt man dagegen voraus, daß der technische Fortschritt rein faktorerhöhend wirkt, so ist $\pi_1 = \pi_2 = 0$ und Gleichung (14) vereinfacht sich zu

$$u \cdot (a_1 - a_2) + (1-u) \cdot (b_1 - b_2) = 0 \quad (14a)$$

Ist nun, wie eingangs vorausgesetzt wurde, u nicht konstant, so existieren beliebig viele Werte für a_i und b_i ($i=1,2$), die die Bedingung (14a) erfüllen, außer wir machen die zusätzliche Annahme, daß die Differenzen $a_1 - a_2$ und $b_1 - b_2$ konstant sind. Dies ist aber praktisch gleichbedeutend mit der Annahme, daß sich der technische Fortschritt mit konstanter Rate einstellt und durch ein stetiges exponentielles Wachstum von A_1 und B_1 beschrieben werden kann, daß also die Veränderungs-raten a_i und b_i selbst konstant sind. Geht man aber von dieser Voraussetzung aus, so muß, damit bei einem vari-

ablen u die Bedingung (14a) immer erfüllt ist, stets $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ sein, woraus wiederum folgt, daß auch $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$ sein muß. In diesem Fall sind aber die partiellen Ableitungen, wie wir oben gesehen haben, identisch und damit auch die beiden Produktionsfunktionen selbst identisch. Es ist also auch in diesem Fall einer angenommenen Konstanz der Fortschrittsraten möglich, aus dem gegebenen Zahlenmaterial eine Produktionsfunktion zu identifizieren.

Nicht mehr identifizierbar ist dagegen eine bestimmte Produktionsfunktion aus einem gegebenen Zahlenmaterial dann, wenn keine zusätzlichen Annahmen über den technischen Fortschritt gemacht werden. Denn setzt man voraus, daß der technische Fortschritt sowohl faktor-erhöhend als auch nicht faktor erhöhend auftreten kann, so impliziert die Nichtkonstanz von u, wie man leicht aus Gleichung (14) erkennen kann, nicht länger die Gleichheit von a_1 und a_2 einerseits und b_1 und b_2 andererseits, selbst dann nicht, wenn a_1 und b_1 als konstant angenommen werden. In diesem Fall läßt sich nur noch die Richtung des technischen Fortschritts eindeutig determinieren, nicht mehr dagegen die absolute Höhe der Fortschrittsraten und die Form der Produktionsfunktion. Dies läßt sich unschwer erkennen, wenn man Gleichung (14) zu folgender Bedingung umformt:

$$(b_1 + \pi_1) - (b_2 + \pi_2) + u[(a_1 - b_1) - (a_2 - b_2)] = 0$$

Da die Profitquote u sich verändern kann, ist diese Bedingung nur dann immer erfüllt, wenn gilt

$$b_1 + \pi_1 = b_2 + \pi_2$$

$$\text{und} \quad a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$

Die letztere dieser Beziehungen besagt aber nichts anderes, als daß der Bias des technischen Fortschritts in beiden Produktionsfunktionen gleich ist. Da aber die Höhe der Fortschrittsraten nicht mehr eindeutig bestimmbar ist, ist auch die Identifizierung einer Produktionsfunktion nicht mehr möglich.

Ebenfalls nicht identifizierbar, trotz der Annahme eines rein faktorerhöhenden Fortschritts, ist eine Produktionsfunktion auch dann, wenn man die Annahme der Konstanz der Fortschrittsraten fallen läßt.

Um dies zeigen zu können, muß man sich klarmachen, daß eine Produktionsfunktion mit einem rein faktorerhöhenden technischen Fortschritt nur dann determiniert ist, wenn sowohl die Effizienzparameter bzw. deren Veränderung als auch die Substitutionselastizität, die die Form der Produktionsfunktion determiniert, bekannt sind. Zur Bestimmung dieser drei Parameter sind aber drei voneinander unabhängige Gleichungen erforderlich, auf Grund derer eine simultane Schätzung aller drei Parameter möglich ist.

Sato hat nun gezeigt, daß sich wohl drei Gleichungen zur simultanen Bestimmung der drei gesuchten Parameter finden lassen, daß aber die Determinante der Jacobi-schen Matrix dieses Gleichungssystems Null ist und deshalb eine Lösung dieses Gleichungssystems nicht existiert.¹⁾

Die erste dieser Gleichungen erhält man, wenn man die Beziehung

$$y = u \cdot (a+k) + (1-u) \cdot (b+n)$$

die ganz allgemein und nicht nur für den Fall einer konstanten Substitutionselastizität (CES-Funktion) gilt, auf die Pro-Kopf-Wachstumsrate $y-n$ umformt. Setzt man nun für $Y/N = z$ und für $N/K = x$, so ist $y-n = \dot{z}/z$ und $n-k = \dot{x}/x$ und daher

$$\frac{\dot{z}}{z} = u \cdot a + (1-u) \cdot b - u \cdot \left(\frac{\dot{x}}{x} \right) \quad (15)$$

Die zweite Gleichung erhält man, wenn man berücksichtigt, daß der Lohnsatz w gleich der Grenzproduktivität

1) Die folgende Beweisführung stammt von R. Sato. Vgl. R. Sato, The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function, in: International Economic Review, Vol. 11 (1970), S. 179 - 208; insbes. S. 180 - 184

der Arbeit ist. In Ausdrücken der Pro-Kopf-Produktionsfunktion $z = f(1/x)$ gilt daher

$$w = B \cdot f'(x)$$

Differenziert man diesen Ausdruck nach der Zeit und dividiert durch w , so erhält man nach verschiedenen Umformungen und Vereinfachungen

$$\frac{\dot{w}}{w} = b - \frac{u}{\sigma} \cdot (b - a + \frac{\dot{x}}{x}) \quad (16)$$

Berücksichtigt man schließlich, daß der Zinssatz r gleich der Grenzproduktivität des Kapitals ist, so ergibt sich daraus analog die dritte Gleichung

$$\frac{\dot{r}}{r} = a + \frac{1-u}{\sigma} \cdot (b - a + \frac{\dot{x}}{x}) \quad (17)$$

In diesen Gleichungen erscheinen alle gesuchten Parameter in expliziter Form. Die Substitutionselastizität ist darin in "efficiency units" definiert;¹⁾ für sie gilt daher

$$\sigma = \frac{d(\frac{K'}{N'}) / \frac{K'}{N'}}{d(\frac{\partial F / \partial N'}{\partial F / \partial K'}) / \frac{\partial F / \partial N'}{\partial F / \partial K'}} \quad (18)$$

In diesem Ausdruck ist $K' = AK$, $N' = BN$, $\partial F / \partial K' = \partial F / \partial AK = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{r}{A}$ und $\partial F / \partial N' = \frac{w}{B}$. σ kann deshalb auch geschrieben werden als

$$\sigma = \frac{d(\frac{AK}{BN}) / \frac{AK}{BN}}{d(\frac{Aw}{Br}) / \frac{Aw}{Br}} \quad (18a)$$

bzw., da alle Terme Funktionen der Zeit sind, als

$$\sigma = \frac{a - b - \frac{\dot{x}}{x}}{a - b + \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{r}}{r}} \quad (18b)$$

Wir sehen aus diesen Definitionsgleichungen, daß die Substitutionselastizität vom technischen Fortschritt

1) Wie wir wissen, wird die Substitutionselastizität bei einer Produktionsfunktion mit einem faktorerhöhenden technischen Fortschritt allgemein in "efficiency units" definiert. Vgl. P. A. David und Th. van de Klundert, a.a.O. S. 361

nicht unabhängig ist, wenn dieser nicht Hicks-neutral ist.

Trotz der drei Gleichungen (15) - (17) läßt sich für die drei Unbekannten a , b und σ keine Lösung finden. Dies läßt sich am einfachsten dann erkennen, wenn man die drei Gleichungen (15) - (17) geringfügig umformt und umgruppiert. Gleichung (15) kann nämlich auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$u \cdot a + (1-u) \cdot b - u \cdot \left(\frac{\dot{x}}{x} \right) - \frac{\dot{z}}{z} = 0 \quad (15a)$$

Multiplizieren wir außerdem Gleichung (16) und (17) mit σ , so erhalten wir nach geringfügiger Umformung aus (17)

$$a \cdot \sigma + (1-u) \cdot (b-a + \frac{\dot{x}}{x}) - \frac{\dot{r}}{r} \cdot \sigma = 0 \quad (17a)$$

und aus (16)

$$b \cdot \sigma - u \cdot (b-a + \frac{\dot{x}}{x}) - \frac{\dot{w}}{w} \cdot \sigma = 0 \quad (16a)$$

Berechnet man nun aus dem aus den Gleichungen (15) - (17) gewonnenen Gleichungssystem, bestehend aus den drei Gleichungen (15a), (17a) und (16a), die Jacobische Matrix J , so kann man feststellen, daß die Determinante der Jacobischen Matrix dieses Systems $\det J$ gleich Null ist. Es ist nämlich

$$J = \begin{pmatrix} u & 1-u & 0 \\ \sigma-1+u & 1-u & a - \frac{\dot{r}}{r} \\ u & \sigma-u & b - \frac{\dot{w}}{w} \end{pmatrix}$$

und daher

$$\det J = \begin{vmatrix} u & 1-u & 0 \\ \sigma-1+u & 1-u & a - \frac{\dot{r}}{r} \\ u & \sigma-u & b - \frac{\dot{w}}{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & 1-u & 0 \\ \sigma-1 & 0 & a - \frac{\dot{r}}{r} \\ 0 & \sigma-1 & b - \frac{\dot{w}}{w} \end{vmatrix} = 0$$

Daraus folgt, daß der Rang der Jacobischen Matrix

kleiner als 3 ist. Tatsächlich besitzt die Matrix nur einen Rang von 2.¹⁾ Das ergibt sich aus der Tatsache, daß zwar $\det J = 0$ ist, nicht aber die zu den Elementen von J gehörenden Unterdeterminanten. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß das durch die Gleichungen (15) - (17) beschriebene Gleichungssystem nur zwei voneinander unabhängige Gleichungen besitzt. Vom ökonomischen Standpunkt aus ist das auch unmittelbar einleuchtend, weil bei einer linear-homogenen Produktionsfunktion die partiellen Grenzproduktivitäten der Faktoren auf Grund des Eulerschen Theorems

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Y}{\partial N} \cdot N$$

in einem direkten Funktionalzusammenhang miteinander in Verbindung stehen, so daß sich aus der Kenntnis der Produktionsfunktion und einer partiellen Ableitung der Wert der anderen partiellen Ableitung unmittelbar ergibt.

Auf Grund der Tatsache, daß es im Falle einer Produktionsfunktion mit rein faktorerhöhendem technischem Fortschritt nicht möglich ist, drei voneinander unabhängige Schätzgleichungen zu finden, ist ohne zusätzliche Annahmen eine simultane Schätzung der Substitutionselastizität und eines nichtneutralen technischen Fortschritts und damit die Identifizierung einer Produktionsfunktion auch bei rein faktorerhöhendem technischem Fortschritt nicht möglich.

Unmöglich ist schließlich die Identifizierung einer Produktionsfunktion - selbst wenn der technische Fortschritt rein faktorerhöhend wirkt und die Fortschrittsraten konstant sind - auch dann, wenn die Einkommensverteilung konstant ist oder wenn sich die Kapitalintensität im Zeitablauf nicht verändert.

1) Zum Begriff und zur Bestimmung des Ranges einer Matrix vgl. H. Körch u.a. (Hrsg.), Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, Opladen 1972, S. 198 ff

Ist nämlich u konstant, so ist die Gleichung (14) für beliebige Werte von a und b erfüllt, die der Bedingung

$$\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = - \frac{1-u}{u}$$

genügen, weshalb a und b im Prinzip beliebig angenommen werden können. Ist dagegen die Kapitalintensität konstant, so ist $k = n$ und deshalb $y = u \cdot a + (1-u) \cdot b + \pi$. Diese Beziehung kann aber bei konstanten Größen von a , b und π nicht erfüllt sein, wenn sich nicht zufälligerweise die beobachteten Werte von y und u gerade richtig einpassen.

Nach diesen Ausführungen muß festgestellt werden, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, auf Grund eines gegebenen Datenmaterials eine bestimmte Produktionsfunktion zu identifizieren. Vielmehr können mehrere (im Prinzip sogar beliebig viele) Produktionsfunktionen mit einem vorgegebenen Zahlenmaterial konsistent sein.

David und van de Klundert gelang es zwar, eine Produktionsfunktion zu identifizieren, aber nur, weil sie annahmen, daß der gesamte technische Fortschritt rein faktorerhöhend wirkt und die Fortschrittsraten konstant sind. Außerdem ist der so ermittelte technische Fortschritt Beckmann-neutral.

Zusammenfassend muß deshalb festgestellt werden, daß es auf Grund des "Unmöglichkeitstheorems" von Diamond und McFadden bisher nicht möglich ist, die Substitutionselastizität zu messen. Damit wird aber die Substitutionselastizität, so wie sie bisher definiert und verwendet wird, zu einem analytischen Parameter "degradiert", der ohne empirisch faßbaren Gehalt ist. Außerdem kann aus diesem Grund nicht festgestellt werden, von welchen Determinanten die Substitutionselastizität beeinflußt wird. Auf Grund des "Unmöglichkeitstheorems" ist es nämlich ohne weiteres möglich, bestimmte reale Erscheinungen sowohl auf die Faktorsub-

stitution als auch auf den Einfluß des technischen Fortschritts zurückzuführen. Dabei ist jede Art der analytischen Aufteilung auf die einzelnen Verursachungsgrößen in gleichem Maße willkürlich. Eine wirkliche Trennung des Substitutionseffektes vom Effekt des technischen Fortschritts ist aber bei der bisher verwendeten Konzeption der Produktionsfunktion und der bisher gebräuchlichen Erfassung des technischen Fortschritts in der Produktionsfunktion nicht möglich.¹⁾

Gegen diese Aussage spricht nicht, daß die bei der Schätzung von Produktionsfunktionen festgestellten Korrelationskoeffizienten in der Regel gut, oft sogar hervorragend sind. Eine gute Beschreibung einer wirtschaftlichen Entwicklung durch eine "Produktionsfunktion" ist nämlich schon aus rein formal-mathematischen Gründen immer möglich, und zwar gelingt die Beschreibung der Entwicklung im allgemeinen um so besser, je

- 1) Damit wird durch das Unmöglichkeitstheorem der Vorwurf Kaldors gegen die neoklassische Theorie bestätigt, der schon 1957 bezweifelte, daß man Bewegungen entlang einer Produktionsfunktion von Verschiebungen der Produktionsfunktion, ausgelöst durch den technischen Fortschritt, trennen könne. Vgl. N. Kaldor, A Model of Economic Growth, in: The Economic Journal, Vol. 47 (1957), S. 591 - 624, hier S. 596. Als Ersatz für die "nichtoperationable" Produktionsfunktion schlug Kaldor daher seine "technical progress function" vor, die auf eine Unterscheidung zwischen dem Einfluß, den Veränderungen der Faktormengen bei gegebener Produktionstechnik und Veränderungen der Produktionstechnik durch technischen Fortschritt bei gegebenen Faktormengen auf die Produktmenge ausüben, verzichtet. Vgl. N. Kaldor, A Model ..., a.a.O., und N. Kaldor und J. A. Mirrlees, A New Model of Economic Growth, in: The Review of Economic Studies, Vol. 29 (1962), S. 174 - 192. Vgl. dazu auch A. E. Ott, Produktionsfunktion, technischer Fortschritt und Wirtschaftswachstum, in: J. Niehans u. a., Einkommensverteilung und technischer Fortschritt; Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 17, Berlin 1959, S. 155 - 202.

Dieses Konzept Kaldors hat jedoch keine größere Verbreitung in der Literatur gefunden; deshalb braucht es auch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt zu werden.

mehr Parameter die "Produktionsfunktion" besitzt. Das folgt aus der Tatsache, daß man grundsätzlich jedes Beobachtungssample durch eine mathematische Funktion perfekt beschreiben kann. Man braucht z. B. nur ein Polynom zu wählen, dessen Grad der Anzahl der Beobachtungen gerade entspricht.¹⁾

Soll die Produktionsfunktion aber nicht nur eine historische Entwicklung beschreiben, sondern auch Ausdruck einer diese Entwicklung erklärenden Theorie sein, so kann die neoklassische Produktionsfunktion in ihrer bisherigen Form als Ausdruck der neoklassischen Theorie mit ihrer Vorstellung der Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren dem Theorieverständnis des kritischen Rationalismus nicht standhalten. Denn es ist auf Grund des "Unmöglichkeitstheorems" von Diamond und McFadden unmöglich, von historischen Produktionsfunktionen auf historische Verteilungsfunktionen zu schließen.

Dies ist insgesamt gesehen ein wenig ermutigendes Ergebnis. Deswegen hat es auch nicht an Versuchen gefehlt, andere Konzepte der neoklassischen Produktionsfunktion zu formulieren, um damit die im Unmöglichkeitstheorem zum Ausdruck kommenden Schwierigkeiten der empirischen Schätzung der Parameter zu überwinden. Ihnen wollen wir uns im folgenden zuwenden, wobei im Mittelpunkt der folgenden Untersuchung ein methodischer Ansatz vorgeschlagen und diskutiert werden soll, mit dem es ermöglicht wird, die Parameter der Produktionsfunktion und des technischen Fortschritts simultan ohne willkürliche Zusatzannahmen über die Höhe der Substitutionselastizität oder die Art des technischen Fortschritts zu schätzen.

1) Vgl. B. Gahlen, Einige Bemerkungen ..., a.a.O. S. 38

7. Ansätze zur Überwindung des Unmöglichkeitstheorems von Diamond und McFadden

a) Der Umgehungsversuch von Sato mit Hilfe des Konzepts der CEDD-Produktionsfunktion

Zweifellos stellt das Unmöglichkeitstheorem von Diamond und McFadden eine Zäsur in den Bemühungen um eine empirische Schätzung substitutionaler Produktionsfunktionen dar. Während die einen in ihm den Beweis sehen, daß die gesamte neoklassische Theorie tautologisiert und zu einem formalistischen System erstarrt sei, das einer empirischen Überprüfung nicht zugänglich ist, und deshalb auch keine Theorie darstelle, die in einer Erfahrungswissenschaft wie den Wirtschaftswissenschaften anwendbar ist,¹⁾ haben andere Autoren versucht, Produktionsfunktionen zu entwickeln, die sowohl variable Substitutionselastizitäten als auch nicht-neutralen technischen Fortschritt zulassen.

Einen ersten Ansatz zur simultanen Schätzung von Substitutionselastizität und technischem Fortschritt glauben Beckmann und Sato gefunden zu haben, indem sie von einer Produktionsfunktion ausgehen, in der der technische Fortschritt rein faktorerhöhend wirkt.²⁾ Diese Annahme impliziert nämlich, daß der technische Fortschritt Beckmann-neutral ist, d. h. daß der technische Fortschritt die Substitutionselastizität so lange nicht beeinflusst, als die Einkommensverteilung konstant ist. Formal ist in einer solchen Produktionsfunktion, wie Sato und Beckmann gezeigt haben, die Substitutionselastizität ausschließlich von der Einkommensverteilung abhängig, so daß man auch sagen kann, einer Produktionsfunktion mit ausschließlich faktorerhöhendem technischem Fortschritt liegt die Annahme $\sigma = \sigma(u)$ zugrunde,

1) Diese Gruppe von Wissenschaftlern wird in Deutschland von B. Gahlen angeführt. Vgl. B. Gahlen, Einige Bemerkungen ..., a.a.O. insbes. S. 40 ff

2) Vgl. R. Sato und M. J. Beckmann, Neutral Inventions ..., a.a.O. S. 63 f

wobei u die Profitquote ist. Akzeptiert man diese Annahme, so folgt daraus, daß man die Substitutionselastizität auch unabhängig von der Höhe der Kapitalintensität schätzen kann. Voraussetzung dafür ist allerdings eine Annahme über die Art der Abhängigkeit der Substitutionselastizität von der Profitquote.

Setzt man z. B. - wie R. Sato es getan hat¹⁾ - voraus, daß zwischen der Substitutionselastizität und der Profitquote eine Funktionalbeziehung der Art

$$\sigma = \alpha \cdot u \quad (19)$$

besteht, in der α eine beliebige Konstante darstellt, so läßt sich σ unmittelbar aus Gleichung (16) oder (17) dieses Kapitels ermitteln. Diese beiden Beziehungen lassen sich nämlich ohne Schwierigkeit zu folgenden Regressionsgleichungen umformen

$$\frac{\dot{w}}{w} = \left[b - \frac{u}{\sigma} \cdot (b-a) \right] - \frac{u}{\sigma} \cdot \frac{\dot{x}}{x} \quad (16a)$$

und

$$\frac{\dot{r}}{r} = \left[a + \frac{1-u}{\sigma} \cdot (b-a) \right] + \frac{1-u}{\sigma} \cdot \frac{\dot{x}}{x} \quad (17a)$$

woraus sich wiederum ohne Schwierigkeit aus dem Schätzwert von $\frac{u}{\sigma} = \frac{1}{\alpha}$ bei bekannter Profitquote u die Höhe von σ ermitteln läßt.

Sato hat nach diesem Verfahren sowohl die Substitutionselastizität als auch die Raten des technischen Fortschritts für den privaten Sektor der Vereinigten Staaten (ohne Landwirtschaft) für den Zeitraum von 1909 - 1960 geschätzt und gelangte dabei zu einer durchschnittlichen Substitutionselastizität von 0,52, einem kapitalerhöhenden technischen Fortschritt von durchschnittlich 0,74 % p.a. und einer arbeitserhöhenden Komponente von jährlich 2,27 %.²⁾ Dabei waren im Zeitablauf weder die Substitutionselastizität noch die jährlichen Raten des technischen Fortschritts konstant. Vielmehr schwankte die "kapitalerhöhende" Komponente zwischen -32,39 % ! (1932)

1) Vgl. R. Sato, The Estimation ..., a.a.O. insbes. S. 187

2) Ebenda S. 194 und S. 206 f

und +13,3 % (1918) und die "arbeitserhöhende" Komponente zwischen -14,13 % (1956) und +18,99 % (1921).

Zweifellos stellt der von Sato aufgezeigte Weg zur Schätzung der Substitutionselastizität und des technischen Fortschritts einen beträchtlichen Fortschritt gegenüber den bisherigen Verfahren dar, denn diese Methode vermeidet sowohl eine der üblichen Neutralitätsannahmen über den technischen Fortschritt (außer der, daß er rein faktorerhöhend bzw. Beckmann-neutral wirkt) als auch die Annahme, daß die Substitutionselastizität im Zeitablauf konstant und unabhängig von der Höhe der Kapitalintensität (CES-Hypothese) sei. Andererseits ist nicht zu verkennen, daß auch die von Sato vorgeschlagene Methode letztlich das Unmöglichkeitstheorem von Diamond und McFadden nicht widerlegen kann, denn auch er kommt nicht ohne eine durchaus willkürliche Zusatzannahme über die Substitutionselastizität aus. Diese Annahme hat aber, wie im folgenden ausführlich gezeigt werden soll, zur Folge, daß damit implizit ein ganz bestimmter Produktionsfunktionstypus vorausgesetzt wird, nämlich die Klasse der "Constant Elasticity of Derived Demand Production Functions" oder CEDD-Produktionsfunktionen.

Um dies zu zeigen, müssen wir auf die im II. Kapitel für die Substitutionselastizität hergeleitete Beziehung

$$\sigma = - \frac{y'(y-xy')}{xyy''} \quad (\text{II},7)$$

zurückgreifen. Formt man diese Beziehung zu folgendem Ausdruck um

$$\sigma = \frac{y-xy'}{-x^2y''} \cdot \frac{xy'}{y} \quad (20)$$

und berücksichtigt, daß $(xy')/y = u$ ist, so sieht man sofort, daß die von Sato angenommene lineare Beziehung zwischen Substitutionselastizität und Profitquote

$\sigma = \alpha \cdot u$ voraussetzt, daß

$$\frac{y-xy'}{-x^2y''} = \alpha \quad (21)$$

ist und damit sowohl von Änderungen der Kapitalintensität x als auch vom technischen Fortschritt unabhängig ist. Berücksichtigt man außerdem, daß

$$\frac{y - xy'}{-x^2 y''} = - \frac{dN}{dw} \cdot \frac{w}{N} = - \frac{\partial Y / \partial N}{N \cdot \partial^2 Y / \partial N^2} = \eta_N \quad (22)$$

ist, so wird unmittelbar klar, daß die Arbeitshypothese von Sato voraussetzt, daß die Elastizität $\eta_N = - \frac{dN}{dw} \cdot \frac{w}{N} = \alpha$ konstant ist. η_N ist aber nichts anderes als die Nachfrageelastizität nach Arbeit bei gegebenem Kapitalstock bzw. pro Kapitaleinheit in bezug auf den Lohnsatz und gibt die relative Einsatzmengenänderung des Faktors Arbeit infolge einer einprozentigen Lohnänderung an. Formal ist η_N die Elastizität der Grenzproduktivitätskurve des Faktors Arbeit.

Setzt man nun voraus, daß η_N eine Konstante ist, so läßt sich die Definitionsgleichung (22) als eine Differentialgleichung auffassen, deren Lösung eine (Klasse von) Produktionsfunktion(en) mit konstanter Faktorpreiselastizität der abgeleiteten Nachfrage nach Arbeit pro Kapitaleinheit ist.¹⁾

Zur Lösung dieser Differentialgleichung ist es zweckmäßig, die Definitionsgleichung (22) zu folgender Gleichung umzuformen:

$$\frac{1}{\eta_N} = \frac{-x^2 y''}{y - xy'} = c$$

wobei $c = 1/\eta_N = 1/\alpha$ ist. Dividiert man nun durch x und integriert, so erhält man

$$\log (y - xy') = c \cdot \log x + \log a_1$$

wobei $\log a_1$ eine beliebige Integrationskonstante ist. Daraus ergibt sich nach Entlogarithmierung

- 1) R. Sato bezeichnet diese Elastizität als "the elasticity of derived demand for labor per unit of capital input", woraus auch die Bezeichnung dieser Klasse von Produktionsfunktionen als "Constant Elasticity of Derived Demand Production Functions" bzw. als CEDD-Produktionsfunktionen herrührt.
Vgl. R. Sato, The Estimation ..., a.a.O. S. 188

$$y - xy' = a_1 x^c$$

und nach Division durch $-x^2$

$$\frac{xy' - y}{x^2} + a_1 x^{c-2} = 0$$

Durch abermalige Integration erhält man daraus

$$\frac{y}{x} + \frac{a_1}{c-1} \cdot x^{c-1} - b_1 = 0$$

wobei b_1 wiederum eine beliebige Integrationskonstante ist. Multipliziert man nun die ganze Gleichung mit x , so erhält man nach Umformung

$$y = \frac{a_1}{1-c} \cdot x^c + b_1 x \quad (23)$$

und nach Einsetzen der ursprünglichen Werte für x und y die Pro-Kopf-Produktionsfunktion

$$\frac{Y}{N} = \frac{a_1}{1-c} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^c + b_1 \cdot \left(\frac{K}{N}\right) \quad (23a)$$

Multipliziert man schließlich diese Gleichung mit N , so erhält man die CEDD-Produktionsfunktion mit konstantem $\eta_N = 1/c$

$$Y = \frac{a_1}{1-c} \cdot K^c \cdot N^{1-c} + b_1 \cdot K \quad (24)$$

Diese Produktionsfunktion gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß kein technischer Fortschritt stattfindet, denn bei Definition der Substitutionselastizität nach Gleichung (18) ist σ in den Gleichungen (18) und (II,7) nur dann gleich, wenn $A(t) = B(t) = 1$ ist. Schließt man dagegen den technischen Fortschritt nicht aus, sondern läßt zu, daß $A(t) \neq B(t) \neq 1$ ist, so sind die Größen K und N in Effizienzeinheiten aufzufassen, d. h. es gilt dann $K' = AK$ und $N' = BN$. Die Produktionsfunktion besitzt daher in diesem Fall die Form

$$Y(K, N, t) = \frac{a_1}{1-c} \cdot (AK)^c \cdot (BN)^{1-c} + b_1 \cdot (AK) \quad (25)$$

wobei A , B , K und N ihrerseits Funktionen von t sind. Setzt man also voraus, daß der technische Fortschritt Beckmann-neutral ist, d. h. rein faktorserhöhend wirkt, und daß zwischen Substitutionselastizität und Profit-

quote eine lineare Beziehung der Form $\sigma = \alpha \cdot u$ besteht, so wird damit implizit die Annahme einer CEDD-Produktionsfunktion der in Gleichung (25) dargestellten Art vorausgesetzt.

Es ist nun auch durchaus möglich, die bei Beckmann-neutralem Fortschritt geltende Abhängigkeit $\sigma = \sigma(u)$ durch die Annahme zu spezifizieren, daß die Substitutionselastizität in einer linearen Abhängigkeit zur Lohnquote steht, und zwar in der Form $\sigma = \beta \cdot v$, wobei $v = 1-u$ die Lohnquote und β eine Konstante ist. Auch diese Annahme impliziert, wie im folgenden gezeigt werden soll, die Voraussetzung einer CEDD-Produktionsfunktion. Die für die Substitutionselastizität geltende Beziehung (II,7) läßt sich nämlich auch zu folgendem Ausdruck umformen:

$$\sigma = - \frac{y'}{xy''} \cdot \left(1 - \frac{xy'}{y}\right) = - \frac{y'}{xy''} \cdot (1-u) \quad (26)$$

Setzt man nun eine lineare Beziehung zwischen Substitutionselastizität und Lohnquote voraus, so muß

$$- \frac{y'}{xy''} = \beta \quad (27)$$

konstant sein. $-y'/(xy'')$ ist nun aber nichts anderes als die Zinselastizität der abgeleiteten Nachfrage nach Kapital pro Arbeitseinheit η_K , die die relative Einsatzmengenänderung des Faktors Kapital bei gegebenem Arbeitsangebot infolge einer einprozentigen Veränderung des Zinssatzes angibt:

$$\eta_K = - \frac{dK}{d\tau} \frac{\tau}{K} = - \frac{\partial Y / \partial K}{K \cdot \partial^2 Y / \partial N^2} = - \frac{y'}{xy''} \quad (28)$$

Die Hypothese $\sigma = \beta \cdot v$ setzt also voraus, daß η_K konstant ist. Dies aber wiederum impliziert, wie folgende Herleitung zeigt, eine CEDD-Produktionsfunktion. Ist nämlich η_K konstant, so ist

$$- \frac{xy''}{y'} = \varepsilon = 1/\eta_K = 1/\beta$$

und
$$\frac{y''}{y'} = - \frac{\varepsilon}{x}$$

Integriert man diese Differentialgleichung, so erhält man

$$\log y' = -\varepsilon \cdot \log x + \log a_2$$

bzw.

$$y' = a_2 x^{-\varepsilon}$$

wobei $\log a_2$ eine beliebige Integrationskonstante ist. Durch nochmaliges Integrieren erhält man schließlich

$$y = \frac{a_2}{1-\varepsilon} \cdot x^{1-\varepsilon} + b_2 \quad (29)$$

wobei b_2 wiederum eine Integrationskonstante ist, bzw. nach Einsetzen der ursprünglichen Werte für y und x

$$\frac{Y}{N} = \frac{a_2}{1-\varepsilon} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^{1-\varepsilon} + b_2 \quad (29a)$$

Daraus erhält man schließlich durch Multiplizieren mit N die CEDD-Produktionsfunktion mit konstantem $\eta_K = 1/\varepsilon$

$$Y = \frac{a_2}{1-\varepsilon} \cdot K^{1-\varepsilon} \cdot N^{\varepsilon} + b_2 \cdot N \quad (30)$$

Auch diese Produktionsfunktion gilt nur unter der Voraussetzung, daß kein technischer Fortschritt stattfindet. Räumt man die Möglichkeit eines faktorerhöhenden technischen Fortschritts ein, so besitzt die CEDD-Produktionsfunktion mit konstantem η_K die Form

$$Y = \frac{a_2}{1-\varepsilon} \cdot (AK)^{1-\varepsilon} \cdot (BN)^{\varepsilon} + b_2 \cdot (BN) \quad (30a)$$

wobei die Größen A , B , K und N ihrerseits wiederum von der Zeit t abhängig sind. Setzt man also voraus, daß der technische Fortschritt Beckmann-neutral ist, d. h. rein faktorerhöhend wirkt, und daß zwischen Substitutionselastizität und Lohnquote eine lineare Beziehung der Form $\sigma = \beta \cdot v$ besteht, so impliziert das die Annahme einer CEDD-Produktionsfunktion mit konstantem η_K , wie sie in Gleichung (30a) beschrieben ist.

Beide CEDD-Funktionen besitzen eine variable Substitutionselastizität, und zwar ist σ weder von der Höhe der Kapitalintensität noch vom technischen Fortschritt unabhängig, sofern dieser auch die Verteilungsquoten beeinflusst. Insofern kann man die CEDD-Produktionsfunktionen als einen Spezialfall der Klasse der VES-Funktionen bezeichnen. Genaugenommen besitzen sie eine lineare Substi-

tutionselastizität, und zwar ist σ entweder eine lineare Funktion von N/Y (bei $\eta_K = \text{const}$) oder von K/Y (bei $\eta_N = \text{const}$). Wie sich leicht zeigen läßt, beträgt die Substitutionselastizität bei $\eta_K = 1/\epsilon$ ¹⁾

$$\sigma = 1 + b_2 \cdot \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right) \cdot \left(\frac{N}{Y}\right) \quad (31)$$

und bei $\eta_N = 1/c$ ²⁾

$$\sigma = 1 + b_1 \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right) \cdot \left(\frac{K}{Y}\right) \quad (32)$$

Aus diesen Beziehungen folgt auch unmittelbar, daß die Veränderung der Substitutionselastizität bei steigender Kapitalintensität ausschließlich von der Höhe der Elastizitäten η_K und η_N abhängig ist, denn es gilt bei

$\eta_K = \text{const}$:

$$\frac{d\sigma}{dx} = b_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \cdot \left(\frac{y'}{y^2}\right) \quad \left| \begin{array}{l} > 0 \text{ für } \eta_K = 1/\epsilon < 1 \\ = 0 \text{ für } \eta_K = 1/\epsilon = 1 \\ < 0 \text{ für } \eta_K = 1/\epsilon > 1 \end{array} \right.$$

bzw. bei $\eta_N = \text{const}$:

$$\frac{d\sigma}{dx} = -b_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{c}\right) \cdot \left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) \quad \left| \begin{array}{l} > 0 \text{ für } \eta_N = 1/c > 1 \\ = 0 \text{ für } \eta_N = 1/c = 1 \\ < 0 \text{ für } \eta_N = 1/c < 1 \\ \text{da } y - xy' = w > 0 \text{ ist.} \end{array} \right.$$

1) Beweis:

Es ist $\sigma = \frac{1}{\epsilon} \cdot (1-u)$, wobei $u = \frac{xy'}{y}$ ist.

Differenziert man Gleichung (29) und setzt in u ein, so erhält man

$$u = \frac{xy'}{y} = \frac{a_2 x^{1-\epsilon}}{\frac{a_2}{1-\epsilon} \cdot x^{1-\epsilon} + b_2}$$

bzw. wenn man berücksichtigt, daß $a_2 x^{1-\epsilon} = (1-\epsilon) \cdot (y - b_2)$ ist:

$$u = \frac{1}{y} \cdot (1-\epsilon) \cdot (y - b_2)$$

Setzt man diese Beziehung in σ ein, so folgt (31).

2) Beweis:

Setzt man Gleichung (23) und deren Ableitung in

$u = \frac{xy'}{y}$ ein und berücksichtigt, daß

$$\frac{a_1}{1-c} \cdot x^{c-1} = \frac{y}{x} \cdot b_1$$

ist, so folgt nach Einsetzen in $\sigma = \frac{1}{c} \cdot u$ die Beziehung (32).

Die lineare Abhängigkeit der Substitutionselastizität von Argumenten der Produktionsfunktion, wie sie in den Beziehungen (31) und (32) zum Ausdruck kommt, hat den entscheidenden Vorteil, daß die Parameter der Produktionsfunktion relativ einfach empirisch ermittelt werden können. Damit bereitet die empirische Schätzung von CEDD-Produktionsfunktionen keine allzu großen Schwierigkeiten.

Das Konzept der CEDD-Produktionsfunktion hat demnach gegenüber den bisherigen Produktionsfunktionen einige nicht bestreitbare Vorteile. Sie besitzt eine variable Substitutionselastizität, die sowohl von der Höhe der Kapitalintensität abhängig ist als auch im Zeitablauf sich verändern kann, und ist trotzdem empirisch leicht zu schätzen. Substitutionselastizität und technischer Fortschritt können simultan geschätzt werden, ohne daß eine der üblichen Neutralitätsannahmen über den technischen Fortschritt vorausgesetzt werden muß. Allein notwendig ist die Voraussetzung, daß der technische Fortschritt rein faktorerhöhend wirkt.

Dennoch kann die im Unmöglichkeitstheorem von Diamond und McFadden zum Ausdruck kommende Unmöglichkeit der simultanen Schätzung von Substitutionselastizität und technischem Fortschritt ohne willkürliche Zusatzannahmen auch mit Hilfe des Konzepts der CEDD-Produktionsfunktion nicht widerlegt werden, denn die Annahme einer konstanten Faktorpreiselastizität der abgeleiteten Nachfrage nach Kapital oder Arbeit stellt letztlich eine ebenso willkürliche Annahme dar wie die Annahme einer konstanten Substitutionselastizität oder eines Hicks- oder Harrod-neutralen Fortschritts, wenn nicht gezeigt werden kann, daß die Elastizität η_K oder η_N auf Grund ökonomischer Verhaltensweisen tatsächlich tendenziell konstant ist. Es ist nun tatsächlich möglich, eine ökonomisch rationale Verhaltensweise aufzuzeigen, die eine Konstanz von η_K zur Folge hat.

b) Die Überwindung des Unmöglichkeitstheorems durch Interpretation der neoklassischen Produktionsfunktion als Ergebnis ökonomischer Verhaltensweisen

Um uns klarzumachen, daß die Annahme einer Konstanz von η_K durchaus nicht als willkürlich angesehen zu werden braucht, sondern als das Ergebnis eines rationalen ökonomischen Kalküls, greifen wir nochmals auf unsere früher schon verwendete Annahme zurück, daß es wohl als ökonomisch rationales Verhalten betrachtet werden muß, wenn die Kapitalisten (die mit den Unternehmern identisch sein mögen) bestrebt sind, ihr Gesamteinkommen - nämlich ihren Gesamtprofit - zu maximieren, und überlegen uns, welche Implikationen mit der Annahme einer solchen Verhaltensweise verbunden sind.

Bei unseren Überlegungen im III. Kapitel, wo diese Verhaltensannahme erstmalig eingeführt wurde, haben wir untersucht, wie durch ein solches Verhalten der Unternehmer die Einkommensverteilung beeinflußt wird. Dabei sind wir davon ausgegangen, daß die Form der Produktionsfunktion für die Unternehmer gegeben ist und durch sie nicht beeinflußt werden kann. Die Unternehmer können sich aber auf der exogen determinierten Produktionsfunktion frei auswählen, welches Produktionsverfahren, d. h. welchen Punkt auf der Produktionsfunktion sie realisieren wollen. Sie haben trotz eines exogen gegebenen Arbeitsangebotes diese Wahl, weil sie die Höhe ihrer Investitionen und damit die Höhe der gewünschten Kapitalintensität frei bestimmen können. Dabei ist vorausgesetzt, daß für die zur Realisierung der gewünschten Kapitalintensität erforderlichen Investitionen jederzeit die entsprechenden Ersparnisse zur Verfügung stehen, so daß das I-S-Gleichgewicht immer erhalten bleibt. Diese Annahme scheint uns vertretbar zu sein, weil die zur Erfüllung des I-S-Gleichgewichts erforderlichen Ersparnisse einmal von den Unternehmern in entscheidendem Ausmaß selbst zur Verfügung gestellt werden und andererseits jederzeit über einen Zwangssparprozeß zur Verfü-

gung gestellt werden können. Unter diesen Voraussetzungen - so konnten wir nachweisen - werden die Unternehmer in dem Bestreben, ihren Gesamtprofit zu maximieren, jenen Punkt der Produktionsfunktion bzw. jene Kapitalintensität wählen, bei der die Elastizität der Grenzproduktivitätskurve des Kapitals

$$\varepsilon = - \frac{dr \cdot K}{dK \cdot r} \quad (33)$$

gerade den Wert Eins besitzt. ε ist aber, wie aus Gleichung (28) unmittelbar zu erkennen ist, nichts anderes als der reziproke Wert der Faktorpreiselastizität der Marktnachfrage (bzw. der abgeleiteten Nachfrage) nach Kapital bei gegebenem Arbeitsangebot bzw. pro Arbeitseinheit η_K .

Die Höhe der Kapitalintensität in einem solchen Profitmaximum ist allerdings nur dann eindeutig determiniert, wenn die Elastizität der Grenzproduktivitätskurve des Kapitals an jedem Punkt verschieden ist. Dies ist z. B. bei einer CEDD-Funktion mit $\eta_N = \text{const}$ der Fall.¹⁾ Dagegen ist bei einer CEDD-Funktion mit $\eta_K = 1$ die Höhe der Kapitalintensität in einem gesamtwirtschaftlichen Profitmaximum unbestimmt, da ein solches bei jeder beliebigen Kapitalintensität realisiert wäre,

- 1) Wie man leicht feststellen kann, beträgt η_K in diesem Fall

$$\eta_K(x) = \frac{1}{1-c} \cdot \left[1 + \frac{b_1}{c \cdot \left(\frac{y(x)}{x} - b_1 \right)} \right]$$

Diese Beziehung erhält man, wenn man η_K für den Fall der CEDD-Funktion mit $\eta_N = \text{const}$ (vgl. Gleichung (23)) explizit berechnet.
In diesem Fall ist nämlich

$$y' = \frac{a_1 c}{1-c} \cdot x^{c-1} + b_1$$

und

$$y'' = - a_1 c x^{c-2}$$

Setzt man diese Ausdrücke in $\eta_K = - \frac{y'}{xy''}$ ein und berücksichtigt, daß man auf Grund von Gleichung (23) für $a_1 c x^{c-1}$ auch $c(c-1) \left(\frac{y}{x} - b_1 \right)$ setzen kann, so erhält man nach einigen Umformungen für η_K obigen Ausdruck.

und schließlich wäre bei einer CEDD-Funktion mit $\eta_K \neq 1 = \text{const}$ ein gesamtwirtschaftliches Profitmaximum überhaupt nicht zu ermitteln. Voraussetzung zur Ermittlung eines gesamtwirtschaftlichen Profitmaximums ist demnach in unserem Modell außer der Annahme, daß die Unternehmer die Höhe der Kapitalintensität als Aktionsparameter beliebig variieren können, die Voraussetzung, daß die exogen vorgegebene Produktionsfunktion nicht gerade eine CEDD-Funktion mit $\eta_K = \text{const}$ ist.

Lassen wir nun die Annahme fallen, daß die Höhe der Kapitalintensität nach Belieben der Unternehmer variiert werden kann, sondern gehen stattdessen davon aus, wie es in den üblichen neoklassischen Modellen allgemein der Fall ist, daß außer dem Arbeitsangebot auch der zu einem bestimmten Zeitpunkt verfügbare Kapitalstock exogen vorgegeben ist, was ja bekanntlich der Fall ist, wenn die Höhe der Sparquote exogen determiniert ist, so besteht für die Unternehmer keine Möglichkeit mehr, ihren Gesamtprofit zu maximieren, außer sie sind in der Lage, die Form der Produktionsfunktion selbst zu beeinflussen. Die Form der Produktionsfunktion wird aber, wie wir bereits ausführlich nachgewiesen haben, ausschließlich von der Substitutionselastizität determiniert. Die Unternehmer müßten daher in der Lage sein, die Höhe der Substitutionselastizität selbst bestimmen und beliebig beeinflussen zu können. Im folgenden wollen wir nun annehmen, daß die Unternehmer dazu tatsächlich in der Lage sind.

Die Annahme, daß die Substitutionselastizität nicht, wie bisher allgemein angenommen wurde, "determined by the technical conditions of production"¹⁾ und damit exogen determiniert ist, sondern für die Unternehmer ein Aktionsparameter ist, den sie beliebig verändern können, ist nun durchaus nicht so unplausibel, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag. Gegen diese Annahme spricht allein schon die Tatsache, daß jede Produktion einen systematischen, vom Menschen veranlaßten und gelenkten

1) Vgl. J. Robinson, The Economics ..., a.a.O. S. 256

Umwandlungsprozeß darstellt, bei dem auf Grund von naturwissenschaftlichen und anderen Gesetzmäßigkeiten sogenannte Inputfaktoren mit Hilfe technischer Verfahren zu einem Output transformiert werden.¹⁾ Dennoch soll sie im folgenden eingehend begründet werden.

Geht man von der Definition der Substitutionselastizität von Sato aus (vgl. Gleichung (18))²⁾, in der die Faktoreinsatzmengen von Arbeit und Kapital in Effizienzeinheiten gemessen werden, so gilt für die Substitutionselastizität, wenn man $\bar{x} = K'/N' = (AK)/(BN)$ und $\bar{y} = g(\bar{x})$ setzt, auch folgende Beziehung:

$$\sigma(\bar{x}) = - \frac{\bar{y}'(\bar{y} - \bar{x}\bar{y}')}{\bar{x}\bar{y}\bar{y}''} \quad (34)$$

Da aber $\bar{x} = \bar{x}(x, t)$ ist, ist auch die Substitutionselastizität letztlich abhängig von der Höhe der in physischen Einheiten gemessenen Kapitalintensität x und dem Ausmaß des technischen Wissens t . Es gilt also auch $\sigma = \sigma(x, t)$.

Wenn nun die Unternehmer die Substitutionselastizität verändern wollen, so können sie das einmal über eine Veränderung der physischen Kapitalintensität erreichen und zum zweiten über eine Veränderung bzw. gezielte Erweiterung des technischen Wissens. Eine Beeinflußbarkeit der physischen Kapitalintensität ist nun unter der Voraussetzung der Vollbeschäftigungsannahme nur über eine Veränderung der Sparquote möglich. Diese Möglichkeit haben wir bei unserer Untersuchung des Profitmaximierungsbestrebens der Unternehmer auf die Einkommensverteilung betrachtet. Ist nun allerdings die Sparquote exogen gegeben und damit auch die Kapitalintensität x auf Grund der zur Verfügung stehenden Ressourcen von Arbeit und Kapital eindeutig vorgegeben und nicht durch die Unternehmer beeinflussbar, so verbleibt den Unternehmern noch als zweite Möglichkeit

1) Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 2

2) Vgl. R. Sato, The Estimation ..., a.a.O. S. 182

zur Beeinflussung der Substitutionselastizität und damit der Form der Produktionsfunktion eine gezielte Erweiterung bzw. Lenkung des technischen Wissens. Dazu ist es nicht erforderlich anzunehmen, daß die Unternehmer die Höhe des technischen Fortschritts beliebig beeinflussen können, vielmehr genügt die Annahme, daß die Unternehmer die Richtung des technischen Fortschritts frei bestimmen können, wie das in dem Fortschritts-Modell von Kennedy mit seiner technischen Fortschritts-grenze zum Ausdruck gebracht ist.¹⁾ Wenn wir also annehmen, daß die Unternehmer trotz exogen determinierter Sparquote in der Lage sind, die Höhe der Substitutionselastizität selbst bestimmen und beliebig variieren zu können, so brauchen wir nur die nicht unplausible Annahme vorauszusetzen, daß die Unternehmer die Richtung des technischen Fortschritts frei bestimmen können.

Verfolgen die Unternehmer nun das Ziel, ihren Gesamtprofit zu maximieren, so werden sie versuchen, ihr technisches Wissen so auszurichten, daß die Grenzproduktivitätskurve des Kapitals überall, d. h. für jede beliebige Kapitalintensität, eine Elastizität von Eins besitzt, da sie nur in diesem Fall sicher sein können, daß auch bei exogenen Veränderungen der Kapitalintensität ihr Profitmaximum erhalten bleibt. Die Unternehmer werden also bestrebt sein, sich ein solches technisches Wissen zu erwerben, daß für alle $0 < x < \infty$ gilt

$$\epsilon = 1/\eta_K = - \frac{\bar{x}(x,t) \cdot \bar{y}''(x,t)}{\bar{y}'(x,t)} = 1 \quad (35)$$

Dieses technische Wissen sei mit t_0 bezeichnet. Wie aus dieser Beziehung unmittelbar zu erkennen ist, hat dieses Verhalten der Unternehmer zur Folge, daß auch die Faktorpreiselastizität der abgeleiteten Nachfrage nach Kapital bei gegebenem Arbeitsangebot am Gesamtmarkt immer gerade gleich Eins ist. Ist nun $x = x_0$

1) Vgl. Kapitel IV, 3 dieser Arbeit und C. Kennedy, Induced Bias ..., a.a.O. S. 541 ff

exogen gegeben, wie es in unserem Modell unterstellt wird, so ist auch $\eta_N = \eta_N(x, t)$ eindeutig determiniert und damit auch¹⁾

$$\sigma = \frac{\eta_K \cdot \eta_N}{\eta_K + \eta_N} = \frac{\eta_N(x_0, t_0)}{1 + \eta_N(x_0, t_0)} \quad (36)$$

Wir sehen also, daß bei exogen gegebenen Ressourcen und einem durch die Unternehmer in der Richtung beeinflußbaren technischen Wissen die Höhe der Substitutionselastizität und damit die Form der Produktionsfunktion Ergebnis eines ökonomisch rationalen Verhaltens der Unternehmer ist und nicht Ausdruck von exogen gegebenen und nicht beeinflussbaren technischen Produktionsbedingungen. Fassen wir das Konzept der neoklassischen Produktionsfunktion in diesem Sinne auf, so können wir nicht nur sagen, daß die neoklassische Produktionsfunktion ein umfassendes und doch überschaubares Modellbild des in der Realität als so ungeheuer komplex erscheinenden Produktionsprozesses darstellt, das sowohl Ausdruck der verschiedenen technischen Produktionsmöglichkeiten und damit Ausdruck des technischen Wissens einer Zeit ist (das Niveau von t_0 ist ja exogen gegeben) als auch Ausdruck von ökonomischen Verhaltensweisen und Gesetzmäßigkeiten, die dazu führen, daß ein bestimmtes technisches Wissensniveau in einer ganz bestimmten, vom Menschen gelenkten Weise zur Befriedigung der menschlichen Bedürfnisse und zur Nutzung zugunsten des menschlichen Wohlbefindes eingesetzt wird, sondern wir können auch eine Aussage über die konkrete Gestalt dieser Produktionsfunktion treffen und diese auch empirisch schätzen. Das Bestreben der Unternehmer, sich ein

1) Diese Beziehung für die Substitutionselastizität erhält man, wenn man berücksichtigt, daß einerseits $\sigma = \eta_N \cdot u$ ist (vgl. Gleichung (20)), andererseits aber auch gilt $\sigma = \eta_K \cdot (1-u)$ (vgl. Gleichung (26)). Setzt man in diesem letzteren Ausdruck $u = \sigma/\eta_N$ und löst nach σ auf, so folgt Gleichung (36) unmittelbar.

Für $\eta_K = 1$ ist dann $\sigma = \frac{\eta_N}{1 + \eta_N}$.

söliches technisches Wissen zu erwerben, daß die Grenzproduktivitätskurve des Kapitals an jeder Stelle eine Elastizität von Eins besitzt und damit bei jeder beliebigen Kapitalintensität das Einkommen der Kapitalisten maximal ist, hat nämlich zur Folge, daß die bei diesem gegebenen Stand des technischen Wissens existierende Produktionsfunktion eine CEDD-Funktion mit $\eta_K = 1$ ist. Wie Sato gezeigt hat, besitzt diese Produktionsfunktion im allgemeinen die Form¹⁾

$$Y = a \cdot B \cdot N \cdot \log \left(\frac{AK}{BN} \right) + b \cdot B \cdot N \quad (37)$$

wobei A und B die Effizienz der Faktoren Kapital und Arbeit anzeigen und a und b konstante Parameter sind. Die Faktoren A, B, K und N sind ihrerseits wieder Funktionen der Zeit. Diese Produktionsfunktion besitzt die Eigenschaft, daß sie an jeder Stelle einen konstanten Pro-Kopf-Gewinn in Höhe von a besitzt. Sato bezeichnet sie deshalb auch als "constant profit (per labor) production function"²⁾. Sie gehört zu der Klasse der "log-linearen Produktionsfunktionen" und dabei speziell zu der Familie der "Bernoulli-Produktionsfunktionen"³⁾. Außerdem ist die Einkommensverteilung bei dieser Produktionsfunktion allein von der Höhe der Substitutionselastizität determiniert, denn es gilt wegen $\sigma = \eta_K(1-u)$ und $\eta_K = 1$

$$\frac{u}{1-u} = \frac{1-\sigma}{\sigma} \quad (38)$$

Da die Substitutionselastizität ihrerseits wieder von

1) Vgl. R. Sato, The Estimation ..., a.a.O. S. 190

Da wir die CEDD-Funktion mit $\eta_K = 1$ in etwas anderer Form auf den folgenden Seiten ausführlich herleiten werden, soll an dieser Stelle auf eine Herleitung der Funktionsform von Sato verzichtet werden.

2) Vgl. R. Sato, The Estimation ..., a.a.O. S. 190

3) Vgl. M. J. Beckmann, R. Sato und M. Schupack, Alternative Approaches to the Estimation of Production Functions and of Technical Change, in: International Economic Review, Vol. 13 (1972), S. 33 - 52

η_N abhängig ist, gilt auch

$$\frac{u}{1-u} = \frac{1}{\eta_N} \quad \text{oder} \quad u = \frac{1}{1 + \eta_N} \quad (39)$$

Damit ist es ohne weiteres möglich, die Höhe der Substitutionselastizität unmittelbar aus den Verteilungsquoten zu bestimmen, und auch die Faktorpreiselastizität der abgeleiteten Nachfrage nach Arbeit läßt sich ohne Schwierigkeit aus der Verteilungsrelation ermitteln. Voraussetzung dafür ist allerdings, daß sich die Wirtschaft im Gleichgewicht befindet und daß die Produktion auch tatsächlich zu minimalen Kosten erfolgt.

Erfolgt ein technischer Fortschritt, so verändern sich die Effizienzindizes von Kapital und Arbeit A und B und damit im allgemeinen auch die Elastizitäten $\eta_K(x,t)$, $\eta_N(x,t)$ und $\sigma(x,t)$. Setzt man nun allerdings voraus, wie das in unserem Modell der Fall ist, daß der technische Fortschritt nicht völlig exogen ist, sondern in seiner Richtung von den Unternehmern beeinflussbar ist, und daß die Unternehmer den technischen Fortschritt so wählen, daß ihr Profitmaximum erhalten bleibt, so nimmt die Produktionsfunktion (37) eine etwas andere Form an. Ein solcher technischer Fortschritt wird nämlich die Elastizität der Grenzproduktivitätskurve des Kapitals $\varepsilon(x,t) = 1$ im Zeitablauf unverändert lassen. Definieren wir einen derart wirkenden technischen Fortschritt als neutral, so impliziert das Profitmaximierungsbestreben der Unternehmer einen neutralen technischen Fortschritt in dem Sinne, daß er die Elastizität der Grenzproduktivitätskurve des Kapitals in Höhe von Eins unverändert läßt. Die CEDD-Funktion nimmt in diesem Fall die Form

$$Y = a(t)N \cdot \log \left(\frac{K}{N} \right) + b(t)N \quad (40)$$

an.

Dies läßt sich folgendermaßen beweisen:

Läßt der technische Fortschritt $\varepsilon(x,t) = 1$ im Zeitablauf unverändert, so ist nämlich

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon(x) = 1/\eta_K = - \frac{xy''}{y'} = 1$$

Daraus erhält man nach Umformung zu der Differentialgleichung $y''/y' = - 1/x$ durch Integration

$\log y' = - \log x + \log a$, wobei $\log a$ eine beliebige Integrationskonstante ist, bzw. nach Entlogarithmierung $y' = a/x$. Integriert man diese Gleichung ein zweites Mal, so erhält man die Pro-Kopf-Produktionsfunktion

$$y = a \cdot \log x + b \quad (41)$$

wobei b wiederum eine beliebige Integrationskonstante ist. Nach Multiplikation mit N und unter Berücksichtigung, daß ein technischer Fortschritt per Definition nur die Konstanten a und b zu verändern vermag, ergibt sich schließlich Gleichung (40).

Die CEDD-Produktionsfunktion mit $\eta_K = 1$ stellt im Gegensatz zu allen bisher konzipierten expliziten neoklassischen Produktionsfunktionen keine Produktionsfunktion dar, die man auf Grund irgendwelcher willkürlicher Arbeitshypothesen erhält, sondern eine Produktionsfunktion, die sich auf Grund eines bestimmten angenommenen Unternehmerverhaltens ergibt, von dem wir glauben, daß es ökonomisch rational ist und deshalb als durchaus nicht unplausible Annahme vorausgesetzt werden kann.

Daß das unterstellte Unternehmerverhalten als durchaus realistisch betrachtet werden kann, wird auch von den Schätzergebnissen, die mit Hilfe dieser Produktionsfunktion erzielt wurden, unterstrichen. Sato hat nämlich auch die Parameter der η_K -Bernoulli-Funktion einer Schätzung unterzogen.¹⁾ Dabei setzte er einmal die Lohnquote eines jeden Jahres mit σ gleich, so daß sich die Substitutionselastizität von Jahr zu Jahr änderte, und zum zweiten ermittelte er die jährlichen Fortschrittsraten, indem er die durchschnittliche Lohnquote $\bar{v}$ des gesamten Zeitraums mit der Substitutionsela-

1) Vgl. R. Sato, The Estimation ..., a.a.O.
S. 196 ff

stizität gleichsetzte.¹⁾ Im privaten Sektor der Vereinigten Staaten (ohne Landwirtschaft) betrug die durchschnittliche Lohnquote zwischen 1909 und 1960 $\bar{v} = 0,663$. Sato nahm deshalb an, daß $\bar{\sigma} = 0,663$ sei.²⁾ Dieser Wert für die Substitutionselastizität liegt durchaus im Rahmen von früheren Schätzungen. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für diesen Zeitraum für $\dot{A}/A$ ein Durchschnittswert von 1,67 % und für $\dot{B}/B$ ein solcher von 1,95 %. Läßt man die Kriegsjahre 1942 - 45 unberücksichtigt, so betragen die betreffenden Werte $\dot{A}/A = 0,79$ % und $\dot{B}/B = 2,18$ %. Dabei schwankt $\dot{A}/A$ zwischen -38,72 % ! (1932) und +22,46 % (1920) und $\dot{B}/B$ zwischen -15,85 % (1956) und +23,47 % (1921). Danach war der technische Fortschritt im langjährigen Durchschnitt Hicks-arbeitssparend. Nimmt man für die Substitutionselastizität dagegen keinen Durchschnittswert an, sondern die aktuellen jährlichen Werte der Lohnquote, so zeigt sich, daß σ langfristig zwar relativ konstant war, aber doch auch kurzfristigen Schwankungen unterworfen war. Dabei schwankte σ zwischen den Werten 0,603 (1932) und 0,699 (1958). Für den technischen Fortschritt ergaben sich unter dieser Voraussetzung (bei Eliminierung der Kriegsjahre 1942 - 45) die Durchschnittswerte $\dot{A}/A = 1,23$ % und $\dot{B}/B = 1,89$ %, wobei $\dot{A}/A$ zwischen -30,45 % (1932) und +24,42 % (1920) schwankte und $\dot{B}/B$ zwischen -16,11 % (1956) und +21,60 % (1921).

Wir sehen also, daß die auf Grund der η_K -Bernoulli-Funktion gefundenen Schätzwerte für die Höhe der Sub-

1) Er unterstellte damit praktisch eine CES-Funktion mit $\sigma = \eta_K^v = \bar{v}$. Nimmt man bei konstantem η_K gleichzeitig konstante Verteilungsquoten und damit ein konstantes σ an, so impliziert das, daß auch η_N konstant ist. Eine CES-Funktion kann deshalb als Sonderfall der CEDD-Funktionen betrachtet werden, nämlich als jener Spezialfall, bei dem η_K und η_N gleichzeitig konstant sind.

2) Vgl. R. Sato, The Estimation ..., a.a.O. S. 196. Wegen der folgenden Schätzwerte vgl. ebenda, Appendix I und IV.

stitutionselastizität und für den technischen Fortschritt von der Größenordnung her plausibel sind und daß auch die Richtung des technischen Fortschritts mit unserer Erfahrung übereinstimmt. Daß der technische "Fortschritt" nicht nur positiv ist, spricht nicht gegen diese Produktionsfunktion, da ungewöhnliche Konjunktursituationen die Effizienz der einzelnen Faktoren, insbesondere des Kapitalstocks, durchaus auch negativ beeinflussen können. Allerdings erhebt sich bei den enormen Ausschlägen (die hohen positiven Ausschläge folgen dabei meist zeitlich auf hohe negative Ausschläge und sind oft auch mit entsprechenden Effizienzausschlägen des anderen Faktors in umgekehrter Richtung verbunden) die Frage, ob diese nicht als Folge vorübergehender Ungleichgewichtssituationen, insbesondere als Folge von temporärer Produktion außerhalb der Minimalkostenkombination angesehen werden müssen.

Insgesamt kann trotz dieser Ungereimtheit das Konzept der η_K -Bernoulli-Produktionsfunktion, das sich auf Grund des Unternehmerverhaltens ergibt, als eine theoretisch befriedigende und empirisch gute Beschreibung des makroökonomischen Produktionsprozesses angesehen werden, wobei die guten empirischen Werte nicht zuletzt ein Indiz für die Richtigkeit der unterstellten Annahme ist, daß die Unternehmer ihr technisches Wissen so ausrichten werden, daß ihr Gesamteinkommen maximiert wird und daß die neoklassische Produktionsfunktion eben nicht nur die technischen Bedingungen der Produktion und das technische Wissen einer Zeit beschreibt, sondern auch Ausdruck der Auswirkung sozio-ökonomischer Verhaltensweisen auf die Produktionstechnik und das technische Wissen einer Zeit ist.

8. Zusammenfassung

Faßt man die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen, so muß festgestellt werden, daß es auf Grund des Unmöglichkeitstheorems von Diamond und McFadden nicht möglich ist, die Substitutionselastizität zu messen, sofern man die Produktionsfunktion allein als Ausdruck der technischen Produktionsbedingungen einer Zeit betrachtet. Folgt man der Vorstellung, daß die Produktionsfunktion ausschließlich technisch determiniert und damit letztlich exogen gegeben ist, so ist sie auf Grund dieses Theorems empirisch nicht überprüfbar und stellt daher keine erklärende Theorie im Sinne des Wissenschaftsverständnisses des kritischen Rationalismus dar.

Interpretiert man die neoklassische Produktionsfunktion dagegen als Ergebnis der Auswirkung sozio-ökonomischer Verhaltensweisen auf die Produktionstechnik und das technische Wissen einer Zeit, so verliert das Unmöglichkeitstheorem von Diamond und McFadden seine Gültigkeit und es ist möglich, sowohl die Substitutionselastizität als auch den technischen Fortschritt zu schätzen. In diesem Falle ist die neoklassische Produktionsfunktion empirischen Überprüfungen zugänglich und damit eine Theorie, die dem Theorieverständnis des kritischen Rationalismus standhalten kann. Erste mit Hilfe der so interpretierten neoklassischen Produktionsfunktion durchgeführte Schätzungen führen zu durchaus plausiblen Ergebnissen, welche die dieser Produktionsfunktion zugrunde liegenden Hypothesen eher bestätigen als widerlegen. Ein fundiertes Urteil über die Angemessenheit dieses Theorieansatzes zur Erklärung der Realität kann allerdings erst durch eine breitere und weitergehende empirische Überprüfung gewonnen werden.

Zieht man an dieser Stelle eine Bilanz über den bisherigen Gang der Arbeit, so lassen sich die bisherigen Ergebnisse auf folgenden Nenner bringen:

Die Substitutionselastizität, die als ein adäquater Parameter zur quantitativen Erfassung des Phänomens der Substitutionalität der Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital angesehen werden kann, ist von zentraler Bedeutung für die Form der als linear-homogen angenommenen neoklassischen Produktionsfunktion.

Die neoklassische Produktionsfunktion ihrerseits ist Ausdruck der klassischen Vorstellungen über den Produktionsprozeß. Verbunden mit der von den Neoklassikern als richtig unterstellten Grenzproduktivitätstheorie ist die neoklassische Produktionsfunktion die Grundlage der neoklassischen Allokations- und Verteilungstheorie.

Die Substitutionselastizität ist daher von zentraler Bedeutung sowohl für die Allokationstheorie als auch für die funktionelle Einkommensverteilung. Sie beeinflußt darüber hinaus das Niveau des gleichgewichtigen Wachstumspfades, nicht dagegen die Wachstumsrate selbst.

Die auf dem Prinzip der Faktorsubstitution basierende neoklassische Theorie stellt insgesamt ein adäquates, logisch konsistentes Instrumentarium zur Erklärung ökonomischer Zusammenhänge in einer Ein-Gut-Wirtschaft dar.

Nicht völlig unproblematisch ist dagegen die empirische Überprüfbarkeit der neoklassischen Theorie. Faßt man nämlich die neoklassische Produktionsfunktion ausschließlich als Ausdruck der technischen Produktionsbedingungen einer Zeit auf, so ist auf Grund des Unmöglichkeitstheorems von Diamond und McFadden eine Schätzung der Substitutionselastizität nicht möglich. Damit ist es in diesem Fall aber auch unmöglich, für eine bestimmte Wirtschaft eine neoklassische Produktionsfunktion empirisch zu ermitteln und mit deren Hilfe die neoklassische Theorie empirisch zu überprüfen. Eine Schätzung der Substitutionselastizität und damit eine empirische Überprüfbarkeit der neoklassischen

Theorie wird vielmehr erst dann möglich, wenn man die neoklassische Produktionsfunktion nicht als ausschließlich technisch determiniert betrachtet, sondern als Ergebnis der Auswirkung sozio-ökonomischer Verhaltensweisen auf die Produktionstechnik und das technische Wissen einer Zeit interpretiert, was bisher allerdings nicht der Fall war.

Als problematisch erweisen sich auch die neoklassischen Modellvorstellungen bei ihrer Anwendung auf eine (realistischere) Zwei-Sektoren-Wirtschaft. Hier führt die neoklassische Theorie nur noch unter ganz speziellen, logisch und empirisch keinesfalls plausiblen Bedingungen zu befriedigenden Ergebnissen. Außerdem entsteht hier der Verdacht einer logischen Inkonsistenz im neoklassischen Modellgebäude. Denn die Existenz einer neoklassischen Produktionsfunktion scheint in einer Zwei-Sektoren-Wirtschaft, selbst bei Annahme neoklassischer Bedingungen für die einzelnen Sektoren, nicht mehr allgemein gesichert.

An dieser Stelle erhebt sich natürlich unmittelbar die Frage, woran es liegt, daß die neoklassische Theorie zwar in der Lage ist, für eine Ein-Gut-Wirtschaft befriedigende Erklärungen zu bieten, nicht dagegen für eine Wirtschaft, in der mehrere, voneinander wesensmäßig verschiedene Güter erzeugt werden. Da eine solche Diskrepanz wohl nur auf die Annahmen der neoklassischen Theorie zurückgeführt werden kann, müssen wir uns im folgenden mit diesen Annahmen eingehender befassen. Dabei liegt der Schluß nahe, daß die oben aufgezeigte Diskrepanz wohl mit der Zusammenfassung der in Wirklichkeit existierenden Fülle technischer Produktionsverfahren zu den beiden aggregierten Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital zusammenhängen muß.

In der Tat ist der in der Produktionsfunktion verwendete neoklassische Kapitalbegriff schon immer Gegenstand heftiger Kritik gewesen, wobei die Diskussion

gerade in jüngster Zeit in ein entscheidendes Stadium gelangt zu sein scheint. Aus diesem Grunde wollen wir uns im folgenden mit dem neoklassischen Kapitalbegriff etwas eingehender auseinandersetzen.

VI. Kapitel

Zur Problematik des neoklassischen Kapitalbegriffs

1. Das Problem der Messung des Kapitalstocks

Im Jahre 1953 veröffentlichte Joan Robinson einen Beitrag über das Konzept der Produktionsfunktion im Lichte der Kapitaltheorie, in dem sie den ihrer Meinung nach höchst unklaren Kapitalbegriff, der sich hinter dem K oder C in der neoklassischen Produktionsfunktion verbirgt, scharf angreift.¹⁾ Nach ihrer Meinung muß man dem Begriff des Kapitals als einem Produktionsfaktor jegliche Operationalität absprechen, denn "when we are discussing accumulation, it is natural to think of capital as measured in terms of product. The process of accumulation consists in refraining from consuming current output in order to add to the stock of wealth. But when we consider, what addition to productive resources a given amount of accumulation makes, we must measure capital in labour units, for the addition to the stock of productive equipment made by adding an increment of capital depends upon how much work is done in constructing it, not upon the cost, in terms of final product, of an hour's labour. Thus, as we move from one point on a production function to another, measuring capital in terms of product, we have to know the product-wage rate in order to see the effect upon production of changing the ratio of capital to labour. Or if we measure in labour units, we have to know the product-wage in order to see how much accumulation would be required to produce a given increment of capital. But the wage-rate alters with the ratio of factors: one symbol, C, cannot stand both for a quantity of product and a quantity of labour time."²⁾

Dieses von J. Robinson aufgeworfene Meßproblem trifft das

1) Vgl. J. Robinson, The Production Function and the Theory of Capital, in: The Review of Economic Studies, Vol. 21 (1953/54), S. 81 - 106

2) Siehe ebenda, S. 82

Konzept der neoklassischen Produktionsfunktion jedoch nicht, wenn man die Produktionsfunktion in ihrem ursprünglichen Sinn interpretiert, nämlich als die Funktion, durch die die Produktion eines Gutes durch zwei Faktoren - Arbeit und Kapital - beschrieben wird, wobei sowohl die Gütermenge als auch die Einsatzmengen der Faktoren völlig homogen und beliebig teilbar sind und alle Größen in "physischen" Einheiten gemessen werden.¹⁾ Berücksichtigt man darüber hinaus, daß strenggenommen wegen der Annahme einer Ein-Gut-Wirtschaft das als Output erscheinende Gut mit dem als "Kapital" eingesetzten Gut identisch sein muß, so wird Y und K sogar in denselben Einheiten gemessen, ausgenommen wenn Y eine Flow-Größe und K eine Stock-Größe ist.

Zugegebenermaßen ist die Darstellung der Produktionsstruktur einer modernen Volkswirtschaft durch ein solches Bild in höchstem Maße wirklichkeitsfremd. Deshalb ging man auch sehr bald dazu über, die Argumente der Produktionsfunktion nicht mehr in "physical units" zu messen, sondern alle Größen - also sowohl den Güteroutput als auch die in Wirklichkeit heterogenen Einsatzmengen der Faktoren Arbeit und Kapital - mit konstanten Preisen zu bewerten. Durch diese Bewertung erhalten die Argumente der Produktionsfunktion den Charakter von Indizes, die in der Lage sind, quantitative Änderungen anzuzeigen. Die Produktionsfunktion beschreibt in diesem Fall eine Kausalbeziehung zwischen der Veränderung des Outputindexes infolge von Änderungen der Inputindizes. Der sich auf diese Weise ergebende Kapitalbegriff gibt dann zwar nicht mehr die Anzahl der eingesetzten "Maschinen" an, sondern drückt die in der Realität existierende Vielfalt von Kapitalgütern durch eine einzige Wertgröße aus, stellt aber andererseits doch wie jeder Mengenindex eine reine Mengengröße dar, nämlich die Menge des eingesetzten "Real"-Kapitals.

Hinter diesem Kapitalbegriff verbirgt sich die theoretische Vorstellung von Eugen von Böhm-Bawerk und Knut Wicksell,

1) Vgl. R. M. Solow, The Production Function and the Theory of Capital, in: The Review of Economic Studies, Vol. 23 (1955/56), S. 101 - 108, hier S. 101

wonach der Index K in der Produktionsfunktion die Höhe eines "Subsistenzmittelfonds" mißt, der es erlaubt, bei der Produktion von Gütern sogenannte "Produktionsumwege" einzuschlagen.¹⁾ Dabei können die Produktionsumwege und die zur Gütererstellung benötigte Zeit, die "Produktionsperiode", um so länger sein, je größer der angesparte Fonds ist. Dieser Fonds, so haben Böhm-Bawerk und Wicksell gezeigt, ist um so größer und damit die "durchschnittliche Produktionsperiode" zur Herstellung einer Gütereinheit um so länger bzw. um so "kapitalintensiver", je höher der Lohnsatz im Verhältnis zum Zinssatz ist.

Größere Bedeutung für das Konzept der Produktionsfunktion als die Interpretation des Begriffs "Realkapital" von Böhm-Bawerk und Wicksell erlangte die Vorstellung, die J. B. Clark mit dem Begriff des "real homogeneous capital" verband.²⁾ Nach J. B. Clark ist der "Kapitalstock", der in der Produktionsfunktion durch den Index K erfaßt wird, wie ein Wasserfall. In jedem Augenblick fließt anderes Wasser in die Tiefe, aber trotzdem bleibt der Wasserfall immer der gleiche. Kapital ist also dieser Parabel zufolge eine homogene "reale Substanz", deren Verzehr ständig ersetzt wird, so daß die Substanz immer gleich bleibt. Je mehr reale Substanz vorhanden ist, so Clark, desto höher ist der Kapitalstock und desto geringer dessen Grenzproduktivität.³⁾

Interpretiert man den Begriff des Produktionsfaktors Kapital in diesem Sinne, so muß freilich vorausgesetzt werden, daß die in Wirklichkeit doch in irgendeiner bestimmten konkreten Form ausgeprägten heterogenen Kapitalgüter kostenlos jederzeit und augenblicklich wie eine gallertartige Masse

1) Vgl. E. v. Böhm-Bawerk, Positive Theorie des Kapitals, 4. Aufl. Jena 1921; K. Wicksell, Über Wert, Kapital und Rente, Jena 1893; derselbe, Vorlesungen über Nationalökonomie, 1. Bd., Jena 1913

2) Vgl. J. B. Clark, Capital and its Earnings, in: Publications of the American Economic Association, Vol. 3 (1888); derselbe, The Distribution ..., a.a.O.

3) Dabei wird implizit vorausgesetzt, daß die Abnutzungsrate konstant bleibt und daß kein technischer Fortschritt stattfindet, der die Struktur des Kapitalstocks verändert.

("like 'jelly' or 'putty'") in jede andere beliebige konkrete Form umgewandelt werden können. Diese "malleability assumption" setzt also eine Verformbarkeit des Kapitals voraus, die ebenfalls alles andere als wirklichkeitsnah ist und offenbar zur Analyse realistischer Mehr-Sektoren-Modelle nicht mehr uneingeschränkt geeignet ist. Abgesehen von dieser recht unwirklichen Annahme erhebt sich bei einer solchen Aggregation von vielen heterogenen Kapitalgütern zu einem homogenen Kapitalstock tatsächlich ein Bewertungsproblem. Grundsätzlich ist es natürlich möglich, die verschiedenen Kapitalgüter mit beliebigen Preisen zu bewerten, wenn man nur annimmt, daß die Struktur des Kapitalstocks unverändert bleibt. Allerdings kann die Produktionsfunktion dann nur als eine rein statische Input-Output-Beziehung betrachtet werden, die für dynamische Analysen jeglicher Art ungeeignet ist und deren Aussagegehalt als höchst zweifelhaft angesehen werden muß, da ein Index erst dann an Aussagefähigkeit gewinnt, wenn er Veränderungen anzeigt.

Betrachtet man die Produktionsfunktion jedoch nicht nur als eine rein statische Input-Output-Beziehung, so kann man die Bewertungsfrage des Produktionsfaktors Kapital nicht mehr einfach durch Einführung fixer Preise lösen, denn eine Veränderung der Einsatzmengen des Faktors Kapital ist unter der Vollbeschäftigungsannahme, die der neoklassischen Theorie stets zugrunde liegt, nur durch eine Investition möglich, die wiederum nur durch Konsumverzicht (Sparen) ermöglicht wird. Da aber der volkswirtschaftliche Output alle Konsum- und Kapitalgüter umfaßt, muß die Einsatzmengenänderung des Produktionsfaktors Kapital gleich dem gesparten Teil des Outputs sein. Das setzt aber voraus, daß der Output Y und der Zuwachs zum Kapitalstock ΔK mit denselben Preisen bewertet werden. Da andererseits unter der neoklassischen Voraussetzung, daß alle ökonomischen Aktivitäten unter den Bedingungen der vollständigen Konkurrenz erfolgen, der Wert des Produkts gleich der Summe der Faktoreinkommen ist, die ihrerseits von den Grenzproduktivitäten der Faktoren Arbeit

und Kapital abhängig sind, ist die eingesetzte Menge des Faktors Kapital sowie eine eventuelle Faktoreinsatzmengenänderung von den Faktorpreisen nicht unabhängig.

Versucht man dennoch, die Einsatzmenge des Produktionsfaktors Kapital im Sinne des oben beschriebenen Begriffs des Realkapitals zu interpretieren, so bewegt sich die neoklassische Theorie bei ihrer Erklärung der Faktorpreise und der Einkommensverteilung in einem Zirkelschluß. Denn die makroökonomische Version der Grenzproduktivitätstheorie versucht die Faktorpreise und die (funktionale) Einkommensverteilung auf die als Ressourcen zur Verfügung stehenden Einsatzmengen der Faktoren Arbeit und Kapital zurückzuführen, wobei aber die Menge des eingesetzten Kapitals selbst wieder von der Höhe des mit seiner Hilfe erklärten Lohn- und Zinssatzes abhängig ist. An dieser Tatsache ändert sich auch dann nichts, wenn man zur Messung des Kapitalstocks seinen Ertragswert heranzieht, und auch dann nichts, wenn man sowohl den Output als auch den Kapitalstock, wie Joan Robinson vorschlug, in "labour-units" mißt.

Daraus folgt, daß die Interpretation des Produktionsfaktors Kapital im Sinne von Realkapital tatsächlich nicht für dynamische Analysen geeignet ist, weshalb auch die neoklassische Produktionsfunktion im Sinne J. B. Clarks nicht mehr als eine statische Input-Output-Beziehung darstellt, die für die Untersuchung dynamischer Prozesse, wie sie heute allgemein untersucht werden, ungeeignet ist.¹⁾

Das Problem, bei einer in der Realität vorhandenen Vielzahl heterogener Kapitalgüter über eine Bewertung dieser Kapitalgüter zu einer makroökonomischen Aggregatgröße, dem gesamtwirtschaftlichen Kapitalstock, zu gelangen, kann dadurch umgangen werden, daß man das Konzept der Produktionsfunktion nicht als eine Funktionalbeziehung zwischen bewerteten Quantitäten auffaßt, sondern als die Gesamtheit aller bei einem gegebenen Stand des technischen Wissens bekannten effizienten

1) Vgl. auch G. C. Harcourt, Some Cambridge Controversities in the Theory of Capital, in: The Journal of Economic Literature, Vol. 7 (1969), S. 369 - 405, hier S. 374

Produktionsverfahren. Realisiert wird von diesen alternativ zur Verfügung stehenden Produktionstechniken bei gegebenen Faktorpreisen jenes Verfahren, das den Bedingungen der Minimalkostenkombination entspricht. Ändern sich nun die (relativen) Faktorpreise, so tritt an die Stelle der bisher kostengünstigsten Technik eine andere Technik, die unter den geänderten Bedingungen kostengünstiger zu produzieren vermag als die alte.

Versteht man das Konzept der Produktionsfunktion und den Begriff des Kapitalstocks in diesem Sinn, so entsteht ein Bewertungsproblem nicht, denn man kann einfach sagen, daß von zwei verschiedenen effizienten Techniken jene die kapitalintensivere ist, die bei einem höheren Lohn-Zins-Verhältnis zum Einsatz gelangt, ohne daß es unbedingt notwendig ist, die Höhe der Kapitalintensität durch irgendeinen konkreten, quantitativen Ausdruck zum Ausdruck zu bringen.

Geht man nun von der (etwas theoretischen) Annahme aus, daß zur Herstellung der gleichen Produktmenge eine unendliche Anzahl solcher Produktionstechniken zur Verfügung steht, die bei alternativen Faktorpreisrelationen in der Lage sind, dieses Produkt zu minimalen Kosten herzustellen, so ist eine kontinuierliche (Prozeß-)Substitution möglich und wir können die Gesamtheit der alternativ möglichen Produktionstechniken durch eine Produktionsfunktion mit kontinuierlich substituierbaren Faktoren, d. h. durch eine neoklassische Produktionsfunktion, beschreiben.

In diesem Sinne läßt sich schon die Schneidersche Definition der substitutionalen Produktionsfunktion interpretieren.¹⁾ Etwas klarer kommt diese Vorstellung in der "quasi-klassischen" Produktionsfunktion von Krelle zum Ausdruck, der mit diesem Konzept den Widerspruch zwischen der einzelwirtschaftlichen Erfahrung von weitgehend limitationalen Produktionsprozessen und dem makroökonomischen Phänomen der Substitutionalität zwischen Arbeit und Kapital zu lösen versucht.²⁾

1) Vgl. E. Schneider, Einführung ..., a.a.O. S. 169

2) Vgl. W. Krelle, Produktionstheorie, a.a.O. S. 40 f. Erstmalig veröffentlichte Krelle dieses Konzept der quasi-klassischen Produktionsfunktion in seiner "Preistheorie". Vgl. W. Krelle, Preistheorie, Tübingen, Zürich 1961, S. 66ff

Vor Krelle hat schon N. Georgescu-Roegen mathematisch bewiesen, daß die Produktionsstruktur einer Branche oder einer gesamten Volkswirtschaft trotz der Annahme, daß für jede Unternehmung einzeln nur limitationale Produktionsfunktionen existieren, durchaus durch eine substitutionale Produktionsfunktion zuverlässig beschrieben werden kann, sofern die Sprungstellen von einem Produktionsprozeß zum anderen nur genügend dicht beieinander liegen.¹⁾ Der Durchbruch dieser Interpretation der substitutionalen Produktionsfunktion gelang jedoch erst Samuelson, der durch die Formulierung seiner "Surrogat-Produktionsfunktion" dieser Vorstellung allgemeinen Eingang in die Literatur verschafft hat.²⁾

Auf einer so interpretierten neoklassischen Produktionsfunktion beschreibt jeder Punkt eine Produktionstechnik, und zwar jene, die bei dem zu diesem Punkt gehörigen Faktorpreisverhältnis mit den geringsten Kosten arbeitet. Da auch die in diesem Sinn interpretierte Produktionsfunktion nur ein Modellbild der Wirklichkeit sein soll, kommt es weniger darauf an, daß tatsächlich "unendlich" viele alternative Produktionstechniken zur Verfügung stehen, als vielmehr darauf, daß es tatsächlich möglich ist, alle möglichen Techniken so in eine eindeutige Rangordnung zu bringen, daß bei alternativen relativen Faktorpreisen jede Technik auch tatsächlich nur einmal als kostengünstigstes Produktionsverfahren erscheint. Denn nur unter dieser Voraussetzung ist es möglich, eine bestimmte Technik als "kapitalintensiver" oder weniger "kapitalintensiv" als eine andere zu bezeichnen.

Wie im folgenden ausführlich gezeigt werden soll, ist es nun leider im allgemeinen nicht möglich, verschiedene

- 1) Vgl. N. Georgescu-Roegen, The Aggregate Linear Production Function, in: Activity Analysis of Production and Allocation, edited by T. C. Koopmans, New York, London 1951, S. 98 - 115
- 2) Vgl. P. A. Samuelson, Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function, in: The Review of Economic Studies, Vol. 29 (1962), S. 193 - 206. Nach Samuelson kann die "surrogate production function" als eine "Als-ob-Produktionsfunktion" interpretiert werden (vgl. P. A. Samuelson, Parable ..., a.a.O. S. 194)

Techniken so zu ordnen, daß bei alternativen Lohn-Zins-Relationen jede Technik nur einmal als die kostengünstigste erscheint. Damit ist es auch leider unmöglich, einer bestimmten Technik eine ganz bestimmte "Kapitalintensität" zuzuordnen. Vielmehr kann in Wirklichkeit ein ganz bestimmtes, eindeutig charakterisiertes Produktionsverfahren bei unterschiedlichen relativen Faktorpreisen mehrmals die kostengünstigste Technik sein und müßte demnach auf einer Produktionsfunktion durch mindestens zwei Punkte repräsentiert werden. Da man aber wohl schlecht sagen kann, daß ein und dasselbe technische Verfahren einmal weniger kapitalintensiv ist als eine andere Technik und das andere Mal eine höhere Kapitalintensität aufweist als jenes Verfahren, ist es im allgemeinen nicht möglich, zwischen dem Lohn-Zins-Verhältnis und der Kapitalintensität einer Wirtschaft eine eineindeutige Funktionalbeziehung zu gewinnen. Zurückzuführen ist diese Tatsache auf das sog. Switching-Reswitching-Phänomen, das in der neueren Kapitaltheorie eine zentrale Stellung einnimmt. Mit ihm wollen wir uns im folgenden eingehend befassen.

2. Das Switching und Reswitching von Techniken

a) Das Konzept der Faktorpreiskurve

Um unsere Behauptung zu begründen, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, einer bestimmten Technik eine ganz bestimmte Kapitalintensität zuzuordnen, und daß es deshalb auch nicht möglich ist, zwischen der Lohn-Zins-Relation und der Kapitalintensität einer Wirtschaft eine eineindeutige Funktionalbeziehung zu ermitteln, wie sie durch die Grundannahmen der neoklassischen Theorie implizit unterstellt wird, müssen wir zunächst ein Instrumentarium erarbeiten, das es uns ermöglicht, den komplexen Begriff einer "Produktionstechnik" für ökonomische Analysen zugänglich zu machen. Ein solches Instrument besitzen wir in der sog. Faktorpreiskurve. Sie soll im folgenden zunächst hergeleitet und ausführlich erläutert werden.

Um uns das Konzept der Faktorpreiskurve klarzumachen, gehen wir zu ihrer Herleitung von einem einfachen Zwei-Sektoren-Modell aus. In einer Volkswirtschaft werden nur zwei Güter erzeugt: ein homogenes Konsumgut und ein ebenfalls in sich homogenes Kapitalgut. Durch diese Annahme vermeiden wir das Aggregationsproblem, das mit dem Faktor Kapital verbunden ist.¹⁾ Beide Güter werden durch den Einsatz von Arbeit und Kapital erstellt, wobei sich der Faktor "Kapital" eben aus dem einen homogenen Kapitalgut zusammensetzt, das selbst Ergebnis eines Produktionsprozesses unter Verwendung der vorhandenen Produktionsfaktoren ist. Wir beschränken unsere Betrachtung auf eine Periode, um die Probleme, die bei einer zeitlich verbundenen Produktion auftreten und auf die wir später noch genauer eingehen werden, zu vermeiden.

1) Das Problem, das mit der Aggregation von Konsumgütern verbunden ist, ist an sich nicht so schwerwiegend, da man sich als Konsumgut auch ohne weiteres einen Warenkorb vorstellen kann. Dies ist möglich, weil Konsumgüter per Definition nur eine Lebensdauer von einer Periode haben und deshalb keine Bewertungsprobleme auftreten.

In unserem Modell existiert also ein Konsumgütersektor (Sektor I) und ein Kapitalgütersektor (Sektor II). Die Produktionsfunktionen dieser beiden Sektoren seien

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_1(K_1, N_1) && \text{(Konsumgütersektor)} \\ \text{und } Y_2 &= f_2(K_2, N_2) && \text{(Kapitalgütersektor)} \end{aligned}$$

Der Preis des Konsumgutes betrage π und der Preis des Kapitalgutes p . Da wir uns jedoch nicht für die Zusammenhänge zwischen Nominalgrößen interessieren, sondern für die Zusammenhänge, die zwischen den realen Größen einer Volkswirtschaft existieren, wollen wir im folgenden den Preis des Konsumgutes gleich Eins setzen und alle anderen Preise in Konsumgütereinheiten ausdrücken. Wir benützen also den Preis des Konsumgutes $\pi = 1$ als numéraire.

Der Ertrag des Kapitals sei q . Er setzt sich aus einer Vergütung für die Entwertung des Kapitalguts und aus einer Verzinsung des eingesetzten Kapitals zusammen. Bezeichnet man den Zinssatz mit r und die Abschreibungsrate mit μ , so ist $q = (\mu + r)p$. Da wir unsere Betrachtung auf eine Periode beschränken, können wir die Entwertung des Kapitalguts vernachlässigen und deshalb aus Vereinfachungsgründen annehmen, daß $\mu = 0$ sei. Dann ist $q = r \cdot p$ bzw. $q/r = p$.

Außerdem soll angenommen werden, daß die Produktionskoeffizienten in beiden Sektoren konstant sind. Bezeichnen wir die Produktionskoeffizienten im Konsumgütersektor mit $\alpha = K_1/Y_1$ und $\beta = N_1/Y_1$ und im Kapitalgütersektor mit $a = K_2/Y_2$ und $b = N_2/Y_2$, so sind also α , β , a und b Konstante, durch die sich die gegebene Technologie eindeutig beschreiben läßt. Mit dieser angenommenen Konstanz der Produktionskoeffizienten ist jedoch nicht unbedingt die Annahme verbunden, daß es sich um eine völlig limitationale Produktionstechnik handelt, denn diese Annahme bedingt nicht, daß die Produktionskoeffizienten aus technischen Gründen fix

sind, sondern lediglich, daß im Wettbewerbsgleichgewicht - und wir betrachten hier nur solche Gleichgewichtszustände - nur ganz bestimmte Faktoreinsatzrelationen auftreten können.¹⁾ Betrachten wir aber nur solche Gleichgewichte, so können wir hier trotz der nicht notwendigerweise technisch fixierten Produktionskoeffizienten aus Vereinfachungsgründen auch von einer linearen Technologie ausgehen, die sich unter Verwendung des Instrumentariums der Aktivitätsanalyse durch folgende technologische Matrix

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{pmatrix}$$

darstellen läßt.

Abschließend setzen wir voraus, daß immer alle Produktionsfaktoren vollbeschäftigt sind, so daß gilt

$$K_1 + K_2 = K$$

$$\text{und} \quad N_1 + N_2 = N$$

Unter diesen Voraussetzungen sind die Faktorpreise in beiden Sektoren gleich. Außerdem ist im Wettbewerbsgleichgewicht der Preis eines Gutes gleich seinen Durchschnittskosten. Bezeichnen wir mit w den realen Lohnsatz, so gelten deshalb im Gleichgewicht folgende Preisgleichungen:

$$\text{für das Konsumgut} \quad 1 = q\alpha + w\beta \quad (1)$$

$$\text{und für das Kapitalgut} \quad p = qa + wb \quad (2)$$

Da aber $p = q/r$ ist, kann (2) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$q = arq + wrb \quad (2a)$$

Löst man diese Beziehung nach q auf und setzt sie in Gleichung (1) ein, so erhält man aus den beiden Preisgleichungen die Beziehung:

$$\frac{1}{w} = \beta + \frac{\alpha rb}{1 - ar} \quad (3)$$

1) Vgl. J. R. Hicks, Capital and Growth, a.a.O. S. 137

Diese Beziehung wird von Samuelson als "factor-price-frontier", von Hicks dagegen als "wage-equation" bezeichnet.¹⁾ Hier soll sie als "Faktorpreisbeziehung" bezeichnet werden. Sie gibt an, wie hoch bei einem gegebenen Zinssatz und einer gegebenen Produktionstechnik der Lohnsatz maximal sein kann, den die Unternehmer an die Arbeiter bezahlen können, ohne einen Verlust zu erleiden. Betrachtet man umgekehrt den Lohnsatz als exogen gegeben, so beschreibt die Faktorpreisbeziehung die bei alternativen Lohnsätzen maximal erreichbaren Zinssätze.

Die Abbildung der Faktorpreisbeziehung in einem w - r -Diagramm soll als "Faktorpreiskurve" bezeichnet werden. Wie aus Gleichung (3) unschwer zu erkennen ist, schneidet die Faktorpreiskurve die Koordinatenachsen in den Punkten $r_0 = 1/a$ und $w_0 = 1/\beta$. Da aus ökonomischen Gründen die Faktorpreise nicht negativ sein können, ist die Faktorpreiskurve nur in dem Bereich $0 \leq r \leq 1/a$ und $0 \leq w \leq 1/\beta$ definiert. Wäre z. B. der Lohnsatz w über dem angegebenen Grenzwert $1/\beta$ exogen fixiert, so ergäbe sich für die Unternehmer ein negativer interner Zinsfuß und sie würden von einer Produktion ganz absehen. Umgekehrt kann die Rendite nicht über $1/a$ steigen, da sonst der Lohnsatz w negativ sein müßte. Aber auch die Grenzwerte $r = 0$ bzw. $w = 1/\beta$ und $r = 1/a$ bzw. $w = 0$ sind ökonomisch wenig sinnvoll. Denn ein Lohnsatz von Null ist gesamtwirtschaftlich nicht denkbar und auch die Vorstellung, daß die Unternehmer bereit sind, auf eine Verzinsung ihres Kapitals völlig zu verzichten, ist gesamtwirtschaftlich wenig realistisch. Ihr dürfte allenfalls bei einer mikroökonomischen Analyse eine gewisse Bedeutung zukommen. Aus diesem Grund soll im folgenden der Definitionsbereich der Faktorpreiskurve auf den Bereich $0 < r < 1/a$ bzw. $0 < w < 1/\beta$ eingeschränkt werden. Dadurch bleibt auch die

1) Vgl. P. A. Samuelson, Parable ..., a.a.O. S. 196, und J. R. Hicks, Capital and Growth, a.a.O. S. 140

Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen der neoklassischen Theorie erhalten, da auch dort $f_K > 0$ und $f_N > 0$ vorausgesetzt wird und damit die Faktorpreise als strikt positiv angenommen werden.

Die Steigung der Faktorpreiskurve ist negativ, da die Ableitung von Gleichung (3)

$$\frac{d(1/w)}{dr} = \frac{1}{(1-ar)^2} > 0 \quad \text{für } r < 1/a$$

im ökonomisch relevanten Bereich positiv ist.¹⁾ Die Faktorpreiskurve ist daher eine fallende Kurve, die die Koordinatenachsen in $1/a$ und $1/\beta$ schneidet. In Abb. 15 ist eine solche Faktorpreiskurve dargestellt.

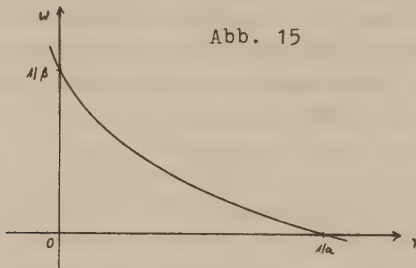


Abb. 15

Im allgemeinen besitzt die Faktorpreiskurve einen nichtlinearen Verlauf. Sie ist nur dann linear, wenn das Verhältnis der Produktionskoeffizienten bzw. die "Kapitalintensität" in beiden Sektoren gleich ist. Das sieht man sofort, wenn man Gleichung (3) zu der Form

$$ar + w\beta + wr(\alpha b - a\beta) = 1 \quad (3a)$$

umformt. Diese Funktionalbeziehung besitzt nämlich nur dann die Form einer Geraden, wenn $\alpha b - a\beta = 0$ ist bzw. wenn $\alpha/\beta = a/b$ ist. In diesem Fall geht aber, wie Burmeister und Dobell gezeigt haben, das Zwei-Sektoren-Modell in ein Ein-Sektor-Modell über.²⁾ Sind dagegen

1) Ebenfalls zu erkennen ist dieser Sachverhalt an der Ableitung

$$\frac{dw}{dr} = - \frac{\alpha\beta}{\beta(1-ar) + \alpha rb} < 0 \quad \text{für } r < 1/a$$

2) Vgl. E. Burmeister und A. R. Dobell, Mathematical Theories ..., a.a.O. S. 120

die "Kapitalintensitäten" in beiden Sektoren unterschiedlich, so hängt der Verlauf der Faktorpreiskurve davon ab, in welchem Sektor die Kapitalintensität höher ist. Ist die Kapitalintensität im Konsumgütersektor höher als im Kapitalgütersektor, ist also $\alpha/\beta > a/b$, so verläuft die Faktorpreiskurve konvex zum Ursprung. Ist dagegen $\alpha/\beta < a/b$, also die Kapitalintensität im Kapitalgütersektor höher als im Konsumgütersektor, so verläuft die Faktorpreiskurve konkav zum Ursprung.¹⁾ Das ergibt sich aus der zweiten Ableitung der Faktorpreisgleichung:

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{2\alpha\beta(\alpha b - a\beta)}{\beta + r(\alpha b - a\beta)^3} \quad \left| \begin{array}{l} > 0 \text{ für } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{a}{b} \text{ bzw. für det } T > 0 \\ = 0 \text{ für } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b} \text{ bzw. für det } T = 0 \\ < 0 \text{ für } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} \text{ bzw. für det } T < 0 \end{array} \right.$$

Mit der Faktorpreiskurve besitzen wir ein analytisches Instrumentarium, um eine bestimmte Technologie auf einfache Weise graphisch darzustellen. Aus der Darstellung ist unmittelbar zu erkennen, daß auf Grund einer gegebenen Technik allein, d. h. allein auf Grund des Vorhandenseins bestimmter Ressourcen, die Faktorpreise noch nicht determiniert sind. Sie sind (im Gegensatz zur neoklassischen Behauptung) vielmehr erst dann determiniert, wenn entweder der Zinssatz oder der Lohnsatz exogen vorgegeben ist. Erst durch eine solche exogene Vorgabe eines Faktorpreises wird der genaue Produktionspunkt auf der Faktorpreiskurve bestimmt.

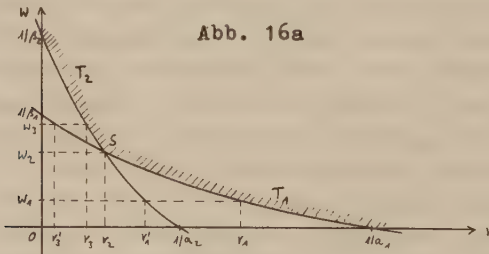
1) Der Verlauf der Faktorpreiskurve wird demnach in entscheidendem Maße von der "Uzawa-Bedingung" beeinflusst.

b) Switching und Reswitching im Zwei-Sektoren-Modell

Existieren nun zwei alternative Techniken

$$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ \beta_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & a_2 \\ \beta_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

so lassen sich auch zwei alternative Faktorpreiskurven ermitteln. Da wir bei zwei alternativen Techniken voraussetzen müssen, daß $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $a_1 \neq a_2$ und $b_1 \neq b_2$ ist, müssen auch zwei unterschiedliche Faktorpreiskurven existieren. Ist nun eine der beiden Techniken nicht im gesamten Wertebereich von w und r der anderen Technik überlegen, so daß die zweite Technik im Vergleich zur ersten Technik im ökonomischen Sinn als ineffiziente Technik bezeichnet werden muß, so existiert im Definitionsbereich der Faktorpreiskurve mindestens ein Schnittpunkt zwischen den beiden Faktorpreiskurven. Der Fall genau eines Schnittpunktes ist in Abb. 16a dargestellt.



Die Frage ist nun, wann welche Technik zum Einsatz gelangt. Nehmen wir an, daß zunächst ein Lohnsatz in Höhe von w_1 exogen vorgegeben ist, so ist unschwer einzusehen, daß die Unternehmer die Technik T_1 in Anwendung bringen, da sie in diesem Fall einen Zinssatz in Höhe von r_1 erzielen können, während sie bei einer Anwendung von Technik T_2 nur den geringeren Zinssatz r'_1 erzielen könnten. Steigt nun der Lohnsatz (exogen), so müssen die Unternehmer zwar eine Verringerung ihrer Rendite in Kauf nehmen, aber sie werden so lange die

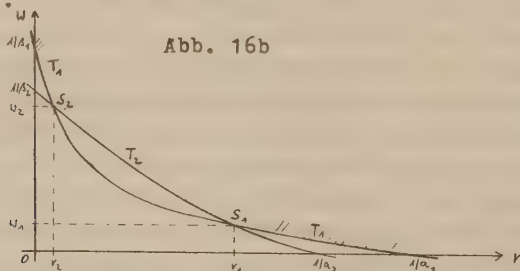
Technik 1 beibehalten, als der Lohnsatz noch unter w_2 liegt. Steigt der Lohn dagegen über w_2 hinaus, z. B. auf w_3 , so wird bei einer Beibehaltung der Technik T_1 die Rendite bis auf r'_3 absinken. Ersetzen die Unternehmer in diesem Fall dagegen die Technik T_1 durch die alternative Technik T_2 , so können sie zwar ein Absinken ihrer Rendite nicht völlig verhindern, doch sinkt sie im jetzigen Fall weniger stark, nämlich nur bis auf $r_3 > r'_3$ ab. Wir können also bei einer exogenen Lohnsteigerung über den Schwellenwert w_2 hinaus ein "Switching" von einer Technik zur anderen beobachten. Zurückzuführen ist dieses "Switching" von einer Technik zur anderen auf das Verhalten der Unternehmer, von denen angenommen wird, daß sie ihren Gewinn maximieren. Die Unternehmer werden nämlich, wenn sie ihren Gewinn maximieren wollen, von verschiedenen alternativen Techniken bei verschiedenen Lohnsätzen jene auswählen, die ihnen die jeweils höchste Rendite einbringt. Durch dieses Verhalten kommt es, daß alle bei alternativen Lohnsätzen realisierten Produktionspunkte auf der "äußeren Umhüllenden" der Faktorpreiskurven liegen. Diese Umhüllende soll im folgenden als "Faktorpreisgrenze" bezeichnet werden.¹⁾

Existiert zwischen den beiden Faktorpreiskurven im Definitionsbereich wie in unserem in Abbildung 16a dargestellten Fall nur ein Schnittpunkt, so ist es nicht schwer, die beiden Techniken nach ihrer "Kapitalintensität" zu ordnen. Denn es ist ohne weiteres möglich, jene Technik als die "kapitalintensivere" zu bezeichnen, die bei einem höheren Lohn-Zins-Verhältnis zum Einsatz gelangt. Diese Einstufung in eine klare Rangordnung ist auch dann möglich, wenn man statt zwei alternativer Techniken eine Vielzahl alternativer Tech-

1) Samuelson bezeichnet die Faktorpreisgrenze als "the outer envelope of factor-price frontiers", Hicks dagegen als "wage frontier". Vgl. P. A. Samuelson, Parable ..., a.a.O. S. 198, und J. R. Hicks, Capital and Growth, a.a.O. S. 150

niken annimmt, sofern nur die Faktorpreiskurven all dieser Techniken mit jeder anderen jeweils nur einen Schnittpunkt aufweisen. Ist dies der Fall, so bestehen keine Bedenken dagegen, das Konzept der Produktionsfunktion im Sinne der "Als-Ob-Produktionsfunktion" von Samuelson zu interpretieren. Allerdings ist es mit einer so interpretierten Produktionsfunktion nicht möglich, aus ihr die Höhe der Faktorpreise abzuleiten, denn wie sich aus dem Konzept der Faktorpreiskurve und der Faktorpreisgrenze ergibt, muß zur Ermittlung eines Gleichgewichtswertes entweder der Lohnsatz oder der Zinssatz exogen vorgegeben werden. Eine so interpretierte Produktionsfunktion kann dann allenfalls als "Parabel" zur ex-post-Beschreibung der Wirklichkeit herangezogen werden, die zwar in der Lage ist, die Wirklichkeit adäquat zu beschreiben und zu erklären, die jedoch für analytische Zwecke, insbesondere für die Ableitung und Erklärung der (relativen) Faktorpreise nur noch begrenzt geeignet ist.

Es ist nun allerdings keineswegs gesichert, daß zwischen zwei verschiedenen Faktorpreiskurven im Definitionsbereich nur ein Schnittpunkt existiert. Vielmehr können zwei Faktorpreiskurven auch so geartet sein, daß sie im Definitionsbereich zwei Schnittpunkte aufweisen. Ein solcher Fall ist in Abbildung 16b dargestellt.



Liegt in diesem Fall der exogen determinierte Lohnsatz niedriger als w_1 , so werden die Unternehmer die Technik T_1 einsetzen. Steigt der Lohnsatz über w_1 , so

werden die Unternehmer die Technik T_1 durch die neue Technik T_2 ersetzen. Steigt der Lohnsatz aber weiter über w_2 hinaus, so müssen die Unternehmer, um ihren Gewinn zu maximieren, wieder zu ihrer alten Technik T_1 zurückkehren, da sie bei dem hohen Lohnsatz $w > w_2$ mit der alten Technik eine höhere Rendite erzielen können, als dies mit der neuen Technik T_2 möglich wäre. In diesem Fall können wir also nicht nur ein Switching von einer Technik zur anderen beobachten, sondern auch ein "Reswitching" zur alten Technik zurück. Wegen diesem Phänomen des Reswitching ist es aber nicht mehr möglich, verschiedene Techniken eindeutig in eine Rangordnung einzustufen, in der die verschiedenen Techniken monoton nach ihrem Einsatz bei alternativen Lohn-Zins-Relationen geordnet sind, denn in einer solchen Rangordnung würde die Technik T_1 einmal vor T_2 und einmal nach T_2 erscheinen. Damit ist es aber auch in diesem Fall nicht mehr möglich zu sagen, T_2 sei kapitalintensiver oder weniger kapitalintensiv als T_1 .

An dieser Stelle erhebt sich natürlich unmittelbar die Frage, ob der in Abbildung 16a dargestellte Fall, in dem nur ein Schnittpunkt zwischen zwei Faktorpreiskurven existiert, ein Sonderfall von rein zufälliger Natur ist oder ob es ökonomische Gründe gibt, die ein Reswitching, wie es in Abbildung 16b dargestellt ist, immer verhindern.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir im folgenden untersuchen, unter welchen Bedingungen in unserem Zwei-Sektoren-Modell ein Reswitching ausgeschlossen ist. Dabei werden wir feststellen, daß ein Reswitching nur unter recht restriktiven Bedingungen ausgeschlossen werden kann, von denen keine eine besondere ökonomische Plausibilität für sich beanspruchen kann.

c) Hinreichende Bedingungen für ein Non-Reswitching
im Zwei-Sektoren-Modell

Zur Herleitung der verschiedenen (hinreichenden) Bedingungen, unter denen ein Reswitching von Techniken in einem Zwei-Sektoren-Modell mit nur einem Kapitalgut ausgeschlossen ist, unterstellen wir wieder, daß nur zwei alternative effiziente Techniken T_1 und T_2 zur Verfügung stehen, die durch folgende technische Matrizen beschrieben werden können:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ \beta_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & a_2 \\ \beta_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $a_1 \neq a_2$ und $b_1 \neq b_2$. Die Faktorpreiskurve der Technik T_1 ist dann gegeben durch

$$w = \frac{1 - a_1 r}{\beta_1 + (\alpha_1 b_1 - a_1 \beta_1) r} \quad (4)$$

und die Faktorpreiskurve der Technik T_2 durch

$$w = \frac{1 - a_2 r}{\beta_2 + (\alpha_2 b_2 - a_2 \beta_2) r} \quad (5)$$

Da die Ausdrücke in den Klammern von (4) und (5) aber nichts anderes als den Wert der Determinante von T_1 und T_2 darstellen, können wir im folgenden auch schreiben

$$(\alpha_1 b_1 - a_1 \beta_1) = \det T_1 = D_1$$

$$\text{und} \quad (\alpha_2 b_2 - a_2 \beta_2) = \det T_2 = D_2$$

Die Faktorpreiskurven (4) und (5) schneiden sich nun bei jenen Werten für den Zinssatz r , bei denen die Bedingung

$$\frac{1 - a_1 r}{\beta_1 + D_1 r} = \frac{1 - a_2 r}{\beta_2 + D_2 r} \quad (6)$$

erfüllt ist. Aus dieser Beziehung erhält man durch Umformung die quadratische Gleichung in r

$$(a_1 D_2 - a_2 D_1) r^2 + (a_1 \beta_2 + D_1 - a_2 \beta_1 - D_2) r + (\beta_1 - \beta_2) = 0 \quad (7)$$

deren Lösungswerte für r die Schnittpunkte der beiden Faktorpreiskurven angeben. Aus dieser Beziehung ist unmittelbar zu erkennen, daß bei einem Zwei-Sektoren-Modell ein Reswitching grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden kann, da es im allgemeinen zwei verschiedene Zinssätze r_1 und r_2 gibt, die diese Gleichung erfüllen. Die beiden Faktorpreiskurven schneiden sich deshalb im allgemeinen zweimal. Es lassen sich allerdings aus dieser Beziehung verschiedene Bedingungen ermitteln, unter denen nur maximal ein Schnittpunkt im Definitionsbereich der Faktorpreiskurve existiert. Diese Bedingungen sollen im folgenden aufgeführt werden.

Setzt man für

$$(a_1 D_2 - a_2 D_1) = a$$

$$(a_1 \beta_2 + D_1 - a_2 \beta_1 - D_2) = b$$

$$(\beta_1 - \beta_2) = c$$

so kann man für (7) auch schreiben

$$ar^2 + br + c = 0$$

Rein formal betrachtet existieren im Definitionsbereich der Faktorpreiskurve dann weniger als zwei Schnittpunkte, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = 0$

Dann ist $r = -\frac{c}{b}$

(ii) $b = 0$

Dann ist $r_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $r_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Da bei Existenz von reellen Lösungen für r_1 und r_2 eine Lösung immer negativ ist, existiert im Definitionsbereich $0 < r < r_{\max}$ maximal ein Schnittpunkt.¹⁾

1) Die Existenz von zwei (reellen) Lösungen ist dann gesichert, wenn $\text{sign } c = -\text{sign } a$ ist. Ist $\text{sign } c = \text{sign } a$, so ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ und es existieren keine reellen Lösungen, d. h. überhaupt keine Schnittpunkte zwischen den beiden Faktorpreiskurven.

(iii) $c = 0$

Dann ist $r_1 = 0$ und $r_2 = -\frac{b}{a}$.

In diesem Fall liegt innerhalb des Definitionsbereichs $0 < r < r_{\max}$ ebenfalls maximal ein Schnittpunkt. An sich ist dieser Fall durch die Annahme $\beta_1 \neq \beta_2$ ausgeschlossen. Doch liegen auch bei $\beta_1 = \beta_2$ verschiedene Techniken vor, sofern $a_1 \neq a_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ und $b_1 \neq b_2$ ist.

(iv) $b^2 = 4ac$

Dann ist $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$, d. h. die beiden Schnittpunkte fallen zusammen.

(v) $-b < \sqrt{b^2 - 4ac}$ für $(4ac - b^2) < 0$ 1)

Dann ist $r_1 > 0$ und $r_2 < 0$.

Auch in diesem Fall liegt innerhalb des Definitionsbereichs $0 < r < r_{\max}$ maximal ein Schnittpunkt.

Da diese Bedingungen ökonomisch praktisch nicht interpretierbar sind, sollen im folgenden einige ökonomische Fälle aufgezeigt werden, bei denen eine der obigen Bedingungen erfüllt ist und bei denen deshalb ein Reswitching ausgeschlossen ist.²⁾

1. Fall

Ein Reswitching ist nicht möglich, wenn gleichzeitig $D_1 = D_2 = 0$ ist.³⁾ In diesem Fall sind, wie wir anhand von Gleichung (3a) gezeigt haben, beide Faktorpreis-

1) Ist $(4ac - b^2) > 0$, so existiert keine (reelle) Lösung.

2) Eine gute systematische Zusammenstellung der in der Literatur angeführten ökonomisch interpretierbaren Non-Reswitching-Bedingungen findet sich bei E. Spitznagel, Die Diskussion um das Switching-Reswitching-Phänomen und ihre Bedeutung für die neoklassische Kapitaltheorie, unveröffentlichte Diplomarbeit, angefertigt am Volkswirtschaftlichen Seminar der Universität Erlangen-Nürnberg, Nürnberg 1972, S. 42 ff

3) Vgl. M. Bruno, E. Burmeister and E. Sheshinski, The Nature and Implications of the Reswitching of Techniques, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80 (1966), S. 526-553, hier S. 535, und J. R. Hicks, Capital and Growth, a.a.O. S. 153

kurven Geraden, die sich ex definitione nur einmal schneiden können. Ökonomisch impliziert die Bedingung $D_1 = D_2 = 0$, wie wir ebenfalls oben schon gezeigt haben, daß bei beiden Techniken die Kapitalintensitäten beider Sektoren gleich sind, faktisch also nur ein Ein-Sektor-Modell vorliegt.

Der Beweis ergibt sich, wenn man in (7) $D_1 = D_2 = 0$ einsetzt. Man erkennt dann unmittelbar, daß dieser Fall ein Spezialfall der Bedingung (i) ist.

2. Fall

Ein Reswitching ist nicht möglich, wenn bei beiden Techniken T_1 und T_2 das Verhältnis der sektoralen Kapitalintensitäten gleich ist, d. h. wenn gilt:

$$\frac{\alpha_1/\beta_1}{a_1/b_1} = \frac{\alpha_2/\beta_2}{a_2/b_2} \quad 1)$$

Beweis:

Nach dem Wurzelsatz von Vieta²⁾ gilt für die Lösungswerte der quadratischen Gleichung (7) r_1 und r_2

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{a_1 D_2 - a_2 D_1}$$

Setzt man nun für $\frac{\alpha_1/\beta_1}{a_1/b_1} = m_1$ und für $\frac{\alpha_2/\beta_2}{a_2/b_2} = m_2$ und berücksichtigt, daß dann $m_1 = m_2 = m$ ist, so ist $D_1 = a_1 \beta_1 (m-1)$ und $D_2 = a_2 \beta_2 (m-1)$. Setzt man diese Ausdrücke in die obige Beziehung ein, so ergibt sich nach geringfügigen Umformungen

$$a_1 a_2 r_1 r_2 = \frac{1}{1-m}$$

In nun $m > 1$, so ist der rechte Ausdruck negativ. Da jedoch alle Inputkoeffizienten positiv sind, muß entweder r_1 oder r_2 negativ sein. Das bedeutet aber, daß nur eine Lösung positiv ist und damit im Defini-

1) Vgl. J. R. Hicks, Capital and Growth, a.a.O. S. 154

2) Vgl. z. B. Großes Handbuch der Mathematik, herausgegeben von W. Gellert u. a., Köln 1969, S. 115

tionsbereich der Faktorpreiskurve höchstens ein Schnittpunkt existiert.

Ist $m < 1$, so ist zwar der rechte Ausdruck positiv. Da aber $m > 0$ ist, ist $1/(1-m) > 1$. Dies ist aber nur möglich, wenn mindestens entweder $a_1 r_1 > 1$ oder $a_1 r_2 > 1$ ($i=1,2$) ist. In diesem Fall ist aber, wie aus (i) bzw. (ii) unmittelbar zu erkennen ist, mindestens ein Lohnsatz negativ. Daraus folgt, daß mindestens ein Schnittpunkt außerhalb des Definitionsbereichs der Faktorpreiskurve liegt.

Ist $m = 1$, so ist $D_1 = D_2 = 0$ und es existiert nur ein Schnittpunkt. Der Fall $m_1 = m_2 = m > 1$ ist ein ökonomisch interpretierbarer Fall der Bedingung (v), der Fall $m = 1$ ein Spezialfall von Bedingung (i). Der Fall $m < 1$ ist in den Bedingungen (i) - (v) nicht enthalten.

3. Fall

Ist $D_1 = 0$ und $D_2 \neq 0$, also $m_1 = 1$ und $m_2 \neq 1$, so ist ein Reswitching ausgeschlossen, wenn entweder

$$a_1 > a_2 \text{ und } \beta_1 < \beta_2$$

oder wenn $a_1 < a_2$ und $\beta_1 > \beta_2$

ist. Für $D_1 \neq 0$ und $D_2 = 0$ gilt analoges.¹⁾

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus Abbildung 16b.

4. Fall

Ist $D_1 \neq 0$ und $D_2 \neq 0$, also $m_1 \neq 1$ und $m_2 \neq 1$, so ist ein Reswitching ebenfalls nicht möglich, wenn entweder gilt²⁾

$$a_1 > a_2 \text{ und } \beta_1 < \beta_2$$

oder $a_1 < a_2$ und $\beta_1 > \beta_2$

Die Beweise ergeben sich ebenfalls unmittelbar aus Abbildung 16b.

Ökonomisch besagen die Fälle (3) und (4), daß ein Reswitching immer dann ausgeschlossen ist, wenn bei der

1) Vgl. M. Bruno u. a., The Nature ..., a.a.O. S. 534

2) Ebenda

Technik, die im Kapitalgütersektor einen höheren Kapitalkoeffizient besitzt, gleichzeitig auch die Arbeitsproduktivität im Konsumgütersektor höher ist als bei der anderen Technik.

5. Fall

Ein Reswitching von Techniken ist schließlich auch dann ausgeschlossen, wenn sich diese Techniken nur durch alternative Produktionsverfahren in einem Sektor unterscheiden.¹⁾

Beweis:

Unterscheiden sich die Techniken nur durch verschiedene Produktionsverfahren im Kapitalgütersektor, so ist zwar $a_1 \neq a_2$ und $b_1 \neq b_2$, dagegen $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$. Damit ist aber Bedingung (iii) für nur einen Schnittpunkt im Definitionsbereich der Faktorpreiskurve erfüllt.

Unterscheiden sich die Techniken dagegen nur durch verschiedene Produktionsverfahren im Konsumgütersektor, so ist zwar $\alpha_1 \neq \alpha_2$ und $\beta_1 \neq \beta_2$, dagegen $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. Setzt man in diesem Fall in Gleichung (6) $a_1 = a_2 = a$, so kann man (6) auf folgende Form bringen:

$$(1 - ar) \cdot (\beta_2 - \beta_1 + D_2 r - D_1 r) = 0$$

Dann ist eine Lösung $r_1 = 1/a$ bzw. $w_1 = 0$. Diese fällt aber nicht in den Definitionsbereich $0 < w < w_{\max}$ bzw. $0 < r < r_{\max}$.

Morishima hat bewiesen, daß selbst unter der Voraussetzung, daß bei zwei bekannten effizienten Techniken

$$T_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ \beta_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & a_2 \\ \beta_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

auch die gemischten Techniken

1) Vgl. M. Morishima, Refutation of the Nonswitching Theorem, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80 (1966), S. 520 - 525, hier S. 523

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_2 \\ \beta_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & a_1 \\ \beta_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

realisierbar und effizient sind, insgesamt also vier Techniken zur Auswahl stehen, ein Reswitching zwischen diesen Techniken unmöglich ist.¹⁾ Trotzdem erscheinen die Bedingungen (i) - (v) und vor allem die ökonomisch interpretierbaren Fälle (1) - (5) als ziemlich restriktiv und können ökonomisch keineswegs als plausibel oder gar als zwingend angesehen werden, so daß der in Abbildung 16b dargestellte Fall des Reswitching wohl als der allgemeine Fall, der keineswegs "paradox" oder "pervers" ist, angesehen werden muß.

Daß der Fall des Reswitching wohl als der allgemeine Fall und der in Abbildung 16a dargestellte Fall mit nur einem Schnittpunkt zwischen zwei Faktorpreiskurven als Spezialfall, der nur unter recht restriktiven Bedingungen eintreten kann, betrachtet werden muß, folgt auch aus der Tatsache, daß in einem Modell mit vielen Kapitalgütern ein Reswitching praktisch überhaupt nicht mehr ausgeschlossen werden kann. Dies soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

1) Vgl. M. Morishima, Theory of Economic Growth, Oxford 1969, S. 21 ff

d) Reswitching von Techniken bei vielen Kapitalgütern

Hat sich uns früher schon im Zusammenhang mit dem neoklassischen Zwei-Sektoren-Modell der Verdacht aufgedrängt, daß die Ursache für die Tatsache, daß bei mehreren voneinander wesensmäßig verschiedenen Gütern nicht mehr unbedingt eine "well-behaved production function" ermittelt werden kann, eben in der angenommenen Heterogenität der Güter begründet sein muß, so wird diese Vermutung durch das Auftreten eines Reswitching von Techniken in einem Modell mit zwei unterschiedlichen Gütern bekräftigt. Endgültig bestätigt wird diese Vermutung durch die Ergebnisse, die sich aus einem allgemeinen Modell mit n verschiedenen Kapitalgütern ergeben. Diese Ergebnisse zeigen nämlich klar, daß ein Reswitching von Techniken in einem solchen Modell praktisch überhaupt nicht mehr auszuschließen ist und daß deshalb wohl die eigentliche Ursache für ein Reswitching von Techniken tatsächlich in der in der Realität anzutreffenden Heterogenität der eingesetzten Kapitalgüter gesehen werden muß.

Um dies zu zeigen, unterstellen wir im folgenden eine Volkswirtschaft mit $n+1$ Sektoren, in denen n verschiedene Kapitalgüter und ein homogenes Konsumgut erzeugt werden.¹⁾ Die Kapitalgütersektoren seien mit $1, 2, \dots, n$ und der Konsumgütersektor mit dem Subskript 0 gekennzeichnet. Der Bestand von Kapitalgütern sei mit $K_1, K_2 \dots K_n$ bezeichnet. Jedes Gut wird mit Hilfe von (als homogen angenommener) Arbeit unter Verwendung der verschiedenen Kapitalgüter $K_1, K_2 \dots K_n$ erzeugt. Dabei sei mit K_{ij} die Menge des i -ten Kapitalgutes bezeichnet, das im j -ten Sektor zum Einsatz gelangt; analog sei N_j die im j -ten Sektor eingesetzte Arbeitsmenge ($i=1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, 2, \dots, n$). In der Volkswirtschaft existieren also folgende Produktionsfunktionen:

1) Das folgende Modell stellt eine geringfügige Abwandlung eines Modells von M. Bruno, E. Burmeister und E. Sheshinski dar. Vgl. M. Bruno u. a., The Nature ..., a.a.O. S. 528 ff

$$Y_j = F_j(N_j, K_{1j}, K_{2j} \dots K_{nj}) \quad (j=0, 1, 2, \dots, n)$$

oder wenn man mit

$$a_{0j} = N_j / Y_j$$

und

$$a_{ij} = K_{ij} / Y_j$$

die verschiedenen Produktionskoeffizienten bezeichnet:

$$1 = F_j(a_{0j}, a_{1j} \dots a_{nj})$$

Außerdem wird angenommen, daß alle Produktionsfaktoren vollbeschäftigt sind. Es soll demnach gelten:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n a_{0j} Y_j &= \sum_{j=0}^n N_j = N & (i=1, 2, \dots, n; \\ \text{und} \quad \sum_{j=0}^n a_{ij} Y_j &= \sum_{j=0}^n K_{ij} = K_i & j=0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Im folgenden soll nun wie in unserem Modell mit nur zwei Sektoren angenommen werden, daß die Produktionskoeffizienten nicht negativ und konstant sind. Wir unterstellen also wieder eine lineare Technologie. In diesem Fall läßt sich die Produktion des Gutes j durch den Vektor $(a_{0j}, a_{1j}, a_{2j} \dots a_{nj})$ beschreiben, den man auch als Aktivität bezeichnet. Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{n0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

bezeichnet man als technische Matrix oder als Produktionstechnik. Sie beschreibt ein bestimmtes Produktionsverfahren der Volkswirtschaft. Jede einzelne Technik besteht demnach jeweils aus $n+1$ Aktivitäten. Zwei Techniken T_1 und T_2 sind dann verschieden, wenn sie sich in mindestens einer Aktivität unterscheiden. Die Summe aller möglichen Techniken bzw. die Gesamtheit aller zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannten Produktionsverfahren stellt die Technologie bzw. das zum betrachteten

Zeitpunkt vorhandene technische Wissen einer Volkswirtschaft dar.¹⁾

Nehmen wir nun wieder den Preis des Konsumgutes mit $\pi = 1$ und die Preise der Kapitalgüter mit $p_1, p_2 \dots p_n$ an sowie ferner die jährliche Abschreibungsrate des i -ten Kapitalgutes mit μ_i , so können wir auch für eine bestimmte Produktionstechnik einer Volkswirtschaft mit n Kapitalgütern die dort im Wettbewerbsgleichgewicht existierenden Preisgleichungen ermitteln und daraus die durch diese Produktionstechnik determinierte Faktorpreisbeziehung herleiten.

Da, wie wir wissen, im Wettbewerbsgleichgewicht der Preis eines Gutes gleich seinen Durchschnittskosten ist, erhalten wir folgende Preisgleichungen:

für das Konsumgut

$$1 = a_{00}w + a_{10}q_1 + a_{20}q_2 + \dots a_{n0}q_n \quad (8)$$

und für die n Kapitalgüter

$$p_j = a_{0j}w + a_{1j}q_1 + a_{2j}q_2 + \dots a_{nj}q_n \quad (9)$$

für $j=1, 2, \dots, n$

Dabei gibt q_i den Kapitalertrag an, der dem Eigentümer in der betrachteten Produktionsperiode aus einer Einheit des i -ten Kapitalgutes zufließt. Bei einem Preis dieses Kapitalgutes von p_i ist daher $q_i = (\mu_i + r)p_i$. Berücksichtigt man die Beziehung in den Preisgleichungen (8) und (9), so ist

$$1 = a_{00}w + \sum_{i=1}^n a_{i0}p_i(\mu_i + r) \quad (8a)$$

und

$$p_j = a_{0j}w + \sum_{i=1}^n a_{ij}p_i(\mu_i + r) \quad (9a)$$

Dividiert man (8a) durch w und schreibt die ganze Be-

1) J. Robinson spricht in diesem Zusammenhang vom "... book of blue prints", dessen einzelne Seiten die Techniken darstellen, die alternativ angewandt werden können. Vgl. J. Robinson und K. A. Naqvi, The Badly Behaved Production Function, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 81 (1967), S. 579 - 591, hier S. 579

ziehung in Vektorschreibweise, so ist

$$\frac{1}{w} = a_{00} + a_0 \xi \cdot \frac{P}{w} \quad (8b)$$

mit

$$a_0 = (a_{10}, a_{20} \dots a_{n0})$$

$\xi = [\mu_{1+r}]$ als Diagonalmatrix, dessen i -tes Element auf der Hauptdiagonalen μ_{1+r} ist

und $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ als Preisvektor

Formt man schließlich das Gleichungssystem (9a) folgendermaßen um:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11}(\mu_{1+r}) & -a_{21}(\mu_{2+r}) & \dots & -a_{n1}(\mu_{n+r}) \\ -a_{12}(\mu_{1+r}) & 1-a_{22}(\mu_{2+r}) & \dots & -a_{n2}(\mu_{n+r}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}(\mu_{1+r}) & -a_{2n}(\mu_{2+r}) & \dots & 1-a_{nn}(\mu_{n+r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01}w \\ a_{02}w \\ \vdots \\ a_{0n}w \end{pmatrix}$$

so nimmt es in Matrizenschreibweise folgende Gestalt an:

$$(I - \xi A)P = wa$$

oder leicht umgeformt:¹⁾

$$\frac{P}{w} = (I - \xi A)^{-1} \cdot a \quad (9b)$$

Setzt man nun die Preisgleichung für die Kapitalgüter in die Preisgleichung für das Konsumgut (8b) ein, so erhält man als Faktorpreisbeziehung für den allgemeinen Fall mit n Kapitalgütern

1) Zu beachten ist allerdings, daß diese Umformung nur deshalb möglich ist, weil die Matrix $[I - \xi A]$ quadratisch ist.

Außerdem ist zu beachten, daß diese Beziehung nur für $P > 0$ ökonomisch sinnvoll ist, d. h. wenn alle Preise positiv sind. Das impliziert aber, daß auch $[I - \xi A]^{-1} \geq 0$ ist. Dies soll in der folgenden Analyse vorausgesetzt werden.

Die hinreichenden Bedingungen für $[I - \xi A]^{-1} \geq 0$ sind bei Burmeister und Dobell im einzelnen dargestellt. Vgl. E. Burmeister und A. R. Dobell, *Mathematical Theories ...*, a.a.O. S. 235 ff

$$\frac{1}{w} = a_{00} + a_0 \zeta (I - \zeta A)^{-1} \cdot a \quad (10)$$

Die durch Gleichung (10) beschriebene Faktorpreisbeziehung besitzt zwar einen größtmöglichen Allgemeingrad, doch ist aus ihr die Beziehung zwischen dem Lohnsatz w und dem Zinssatz r nicht unmittelbar zu erkennen. Das liegt daran, daß in ζ außer dem Zinssatz r auch die Abschreibungsraten μ_i enthalten sind.

Das hier dargestellte allgemeine Modell mit n Kapitalgütern, von denen angenommen wird, daß sie jeweils unterschiedliche Abschreibungsraten besitzen, besitzt zwar den Vorteil, daß es alle in der Literatur diskutierten Modelle als Spezialfälle umfaßt, andererseits aber den Nachteil, daß der Zinssatz r nicht explizit in Erscheinung tritt. Um in Gleichung (10) den Zinssatz r explizit in Erscheinung treten zu lassen und dadurch die Darstellung der Funktionalbeziehung zwischen Lohnsatz und Zinssatz bei gegebener Produktionstechnik durch eine Faktorpreiskurve zu ermöglichen, müssen wir annehmen, daß die Abschreibungsrate für alle Kapitalgüter gleich ist, so daß in den Beziehungen (8b), (9b) und (10) die Diagonalmatrix $\zeta = [\mu_1 + r]$ durch den Skalar $\mu + r$ ersetzt werden kann. Dabei sind natürlich die beiden Spezialfälle $\mu = 1$ und $\mu = 0$ von besonderem Interesse.

Setzt man für alle Kapitalgüter eine uniforme Abschreibungsrate $\mu_1 = 1$ voraus, so unterstellt man ein sog. "circulating-capital-model", d. h. ein Modell, das nur umlaufendes Kapital enthält.¹⁾ Ökonomisch bedeutet das,

1) Ein solches "circulating-capital-model" wird z. B. von Levhari zum Beweis seines "Non-Reswitching-Theorems" verwendet. Vgl. D. Levhari, A Nonsubstitution Theorem and Switching of Techniques, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 79 (1965), S. 98 - 105. (Levhari selbst spricht vom "Non-switching-Theorem", doch scheint uns die Bezeichnung "Non-Reswitching-Theorem" den Kern des Sachverhaltes besser zu treffen. Vgl. D. Levhari and P. A. Samuelson, The Nonswitching Theorem is False, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80 (1966), S. 518 - 519. Vgl. auch E. Spitznagel, Die Diskussion ..a.a.O. S. 29)

daß der Kapitalstock in jeder Periode vollständig in die Produktion eingeht und am Ende der Periode völlig entwertet ist. Eine Fortdauer des Systems über mehrere Perioden setzt deshalb voraus, daß der Kapitalstock in jeder Periode vollständig reproduziert wird.

Setzt man dagegen für alle Kapitalgüter eine ewige Lebensdauer voraus, so daß für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\mu_i = 0$ ist, so spricht man von einem "fixed-capital-model".¹⁾

In dem Modell mit nur umlaufendem Kapital vereinfacht sich die Diagonalmatrix $\xi = [\mu_i + r]$ zu dem Skalar $1+r$ und im Fixkapital-Modell zu dem Skalar r . Entsprechend erhält man im Umlaufskapital-Modell als Faktorpreisbeziehung die Funktion

$$\frac{1}{w} = a_{00} + (1+r)a_0 [I - (1+r)A]^{-1} \cdot a \quad (10a)$$

und im Fixkapital-Modell

$$\frac{1}{w} = a_{00} + ra_0 [I - rA]^{-1} \cdot a \quad (10b)$$

Da wir keine Periodenanalyse durchführen wollen, sondern unsere Betrachtung auf eine Produktionsperiode beschränken werden, wollen wir im folgenden aus Vereinfachungsgründen von der Fixkapitaltheorie ausgehen und annehmen, daß für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\mu_i = 0$ ist. Wir können also im folgenden von der durch Gleichung (10b) beschriebenen Faktorpreiskurve ausgehen. Zur Ermittlung des Verlaufs der Faktorpreiskurve leiten wir (10b) nach r ab und untersuchen, ob die Steigung der Faktorpreiskurve positiv oder negativ ist.

Die Ableitung von (10b) lautet:

$$\frac{d(1/w)}{dr} = a_0 [I - rA]^{-1} \cdot a + a_0 \frac{d}{dr} [I - rA]^{-1} \cdot a \quad (11)$$

Da $a_0 \geq 0$, $a \geq 0$ sowie $[I - rA]^{-1} \geq 0$ ist, ist die Ab-

1) Ein solches "fixed-capital-model" wird z. B. von Hicks und Morishima verwendet. Vgl. J. R. Hicks, Capital and Growth, a.a.O. S. 139 f und M. Morishima, Refutation ..., a.a.O. S. 520 f

leitung $d(1/w)/dr > 0$ und damit die Steigung der Faktorpreiskurve negativ, sofern auch $\frac{d}{dr}[I-rA]^{-1} \geq 0$ ist.¹⁾ Dies ist nun tatsächlich der Fall. Man kann nämlich die inverse Matrix $[I-rA]^{-1}$ durch folgende geometrische Reihe darstellen:²⁾

$$\begin{aligned}[I-rA]^{-1} &= I + rA + (rA)^2 + (rA)^3 + \dots \\ &= I + rA + r^2A^2 + r^3A^3 + \dots\end{aligned}\quad (12)$$

Daraus ist aber unmittelbar zu erkennen, daß bei $A \geq 0$ die Ableitung $d[I-rA]^{-1}/dr \geq 0$ ist.

Wir können also auch in einem Modell mit n Kapitalgütern eine bestimmte Technik durch eine monoton fallende Faktorpreiskurve darstellen, wobei uns jeder Punkt dieser Kurve eine Pareto-optimale Kombination von Reallohnsatz und Profitrate bei Anwendung der betreffenden Technik angibt.

Betrachten wir nun das Spektrum aller möglichen Techniken, also die gesamte Technologie, so erhalten wir für jede einzelne der alternativen Techniken eine bestimmte Faktorpreiskurve. Zeichnet man deren Graphen in ein gemeinsames Diagramm, so stellt die äußere Umhüllende aller Faktorpreiskurven - wie im Zwei-Sektoren-Modell - die Faktorpreisgrenze dar. Sie gibt alle bei einem bestimmten Stand des technischen Wissens (d. h. bei einer gegebenen Technologie) maximal erreichbaren Lohn-Zins-Kombinationen an und bestimmt damit auch die Wahl der Technik, da bei verschiedenen Lohnsätzen immer

1) Der Schluß von $a_0 \geq 0$, $a \geq 0$ sowie $[I-rA]^{-1} \geq 0$ auf $d(1/w)/dr > 0$ bei $d[I-rA]^{-1}/dr \geq 0$ ist berechtigt, wenn man berücksichtigt, daß $[I-rA]^{-1} \cdot a = P/w > 0$ ist, und außerdem annimmt, daß das Konsumgut nicht gänzlich ohne Kapitalgüter erzeugt wird. In diesem Fall ist nämlich immer mindestens ein Element a_{i0} aus dem Vektor a_0 größer Null.

2) Vgl. z. B. E. Burmeister und A. R. Dobell, *Mathematical Theories ...*, a.a.O. S. 237 und S. 438, Lemma 7, und J. R. Hicks, *Capital and Growth*, a.a.O., Appendix B, S. 316 ff

diejenige Technik gewählt wird, die die höchste Profitrate erbringt.

Um nun zu zeigen, daß im allgemeinen Fall mit n Kapitalgütern das Reswitching praktisch überhaupt nicht mehr ausgeschlossen werden kann, betrachten wir zwei alternative effiziente Techniken T_a und T_b . Die Faktorpreiskurve der Technik T_a sei durch die Gleichung

$$\frac{1}{w} = a_{00} + r a_0 [I - rA]^{-1} \cdot a \quad (13)$$

gegeben und die Faktorpreiskurve der Technik T_b durch die Gleichung

$$\frac{1}{w} = b_{00} + r b_0 [I - rB]^{-1} \cdot b \quad (14)$$

Um nun die Schnittpunkte zwischen beiden Faktorpreiskurven zu ermitteln, setzen wir (13) in (14) ein. Berücksichtigt man außerdem, daß die Matrizen $[I - rA]^{-1}$ und $[I - rB]^{-1}$ wegen (12) auch in der Form von Polynomen geschrieben werden können, so erhält man aus (13) und (14)

$$\begin{aligned} a_{00} + r a_0 [I + Ar + A^2 r^2 + A^3 r^3 + \dots] \cdot a &= b_{00} \\ &+ r b_0 [I + Br + B^2 r^2 + B^3 r^3 + \dots] \cdot b \end{aligned}$$

oder wenn man geringfügig umformt

$$\begin{aligned} (a_{00} - b_{00}) + (a_0 I a - b_0 I b) \cdot r + (a_0 A a - b_0 B b) \cdot r^2 \\ + (a_0 A^2 a - b_0 B^2 b) \cdot r^3 + (a_0 A^3 a - b_0 B^3 b) \cdot r^4 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Aus diesem Ausdruck ist unmittelbar zu erkennen, daß es im allgemeinen mehr als eine Lösung für r gibt und damit im allgemeinen auch mehr als ein Schnittpunkt zwischen den Faktorpreiskurven existiert, so daß ein Reswitching nicht als Ausnahme oder als pervers angesehen werden kann. Es ist vielmehr sogar möglich, eine Aussage über die maximale Zahl von Schnittpunkten zu treffen. Berücksichtigt man nämlich, daß für die Matrix $[I - rA]^{-1}$ auch gilt¹⁾

1) Vgl. G. Dietrich und H. Stahl, Grundzüge der Matrizenrechnung, Stuttgart 1965, S. 82

$$[I-rA]^{-1} = \frac{\text{Adj } [I-rA]}{\det [I-rA]} \quad (16)$$

so lassen sich die Schnittpunkte der beiden Faktorpreiskurven (13) und (14) auch aus folgender Gleichung berechnen:

$$(a_{00} - b_{00}) + r \left[\frac{a_0 \text{ Adj } [I-rA] \cdot a}{\det [I-rA]} - \frac{b_0 \text{ Adj } [I-rB] \cdot b}{\det [I-rB]} \right] = 0 \quad (17)$$

Die Determinante $\det [I-rA]$ stellt nun, wie man durch Überprüfung leicht feststellen kann, ein Polynom n -ten Grades in r dar. Demgegenüber ist der Ausdruck $a_0 \text{ Adj } [I-rA] \cdot a$ eine lineare Funktion von r mit Skalaren als Koeffizienten. Für den zweiten Ausdruck in der Klammer gilt entsprechendes. Damit stellt aber auch der gesamte Ausdruck in der Klammer ein Polynom n -ten Grades dar und die Gleichung (17) insgesamt ein Polynom $(n+1)$ -ten Grades. Ein solches Polynom besitzt nun maximal $n+1$ verschiedene Lösungen und damit die beiden Faktorpreiskurven maximal $n+1$ Schnittpunkte. Außerdem kann man aus Gleichung (17) erkennen, daß die Lösungen für r Zahlen und nicht etwa Vektoren oder Matrizen darstellen, von denen allerdings nur jene als Switchpunkte eine ökonomische Relevanz besitzen, die reell und positiv sind und in dem Definitionsbereich der Faktorpreiskurve, also im Intervall $0 < r < r_{\max}$ liegen.

Das Ergebnis, daß sich zwei Faktorpreiskurven in einem Modell mit $n+1$ Sektoren bis zu $(n+1)$ -mal schneiden können, gilt selbst dann, wenn es sich bei beiden betrachteten Techniken T_a und T_b um "benachbarte" Techniken handelt, d. h. um Techniken, die sich nur in einer Aktivität voneinander unterscheiden.¹⁾

Eine Vorstellung über den Wahrscheinlichkeitsgrad, mit dem ein Reswitching zu erwarten ist, erhält man am

1) Vgl. E. Burmeister und A. R. Dobell, Mathematical Theories ..., a.a.O. S. 248 ff

ehesten, wenn man sich klarmacht, unter welchen Bedingungen ein Reswitching im allgemeinen Fall mit n Kapitalgütern ausgeschlossen ist.

Mit Sicherheit kann im allgemeinen Fall mit n verschiedenen Kapitalgütern ein Reswitching nur dann ausgeschlossen werden, wenn in Gleichung (15) alle Terme außer dem absoluten Glied ($a_{00} - b_{00}$) positiv sind. Das folgt aus der Descartes'schen Vorzeichenregel. Die Descartes'sche Vorzeichenregel besagt nämlich, daß die Anzahl der positiven reellen Lösungen eines Polynoms gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten dieses Polynoms ist oder daß sie um eine positive ganze Zahl geringer ist als diese Zahl.¹⁾ Nach dieser Regel besitzt das durch Gleichung (15) beschriebene Polynom nur dann höchstens eine positive Lösung, wenn in Gleichung (15) nur ein Vorzeichenwechsel auftritt. Besteht dieser Vorzeichenwechsel nun darin, daß der erste Term negativ ist und alle weiteren Terme positiv sind, so ist die erste Ableitung von (15) für alle $r > 0$ positiv. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß sich der Wert der Differenz $\frac{1}{w_a} - \frac{1}{w_b}$ im gesamten Bereich $r > 0$ mit zunehmendem r laufend vergrößert.²⁾ Ist dies aber der Fall, so ist in diesem Bereich höchstens ein Schnittpunkt bzw. wenn man voraussetzt, daß beide Techniken effizient sind, genau ein Schnittpunkt möglich.

Obwohl wir bei der Herleitung dieser Bedingung von

- 1) Vgl. M. Bruno u. a., The Nature ..., a.a.O. S. 544, und I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S. 121
- 2) Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei darauf hingewiesen, daß das nicht bedeutet, daß die Differenz selbst (als Abstand betrachtet) dauernd zunimmt. Eine Vergrößerung des Wertes einer Differenz liegt vielmehr schon dann vor, wenn sich eine negative Differenz verkleinert, schließlich Null wird und sich dann in eine positive Differenz verwandelt. Genau das ist in obigem Fall für die Differenz $w_b - w_a$ mit zunehmendem r der Fall.

rein formalen Überlegungen ausgegangen waren, läßt sie sich doch verhältnismäßig leicht ökonomisch interpretieren. Führen wir uns nämlich vor Augen, daß es sich bei den Koeffizienten a_{00} und b_{00} um die in eine Konsumgütereinheit direkt eingehende Arbeitsleistung handelt und die anderen Koeffizienten das Ausmaß der über die verschiedenen Kapitalgüter indirekt in das Konsumgut eingehenden Kosten angeben, so kann man sagen, daß zur Erzeugung einer Konsumgütereinheit bei Verwendung der Technik T_a weniger direkte Arbeit, dafür aber mehr "indirekte Arbeit" erforderlich ist als bei Anwendung der Technik T_b . Ersetzt man nun den Begriff "indirekte Arbeit" durch das Wort "Kapital", so kann auch gesagt werden, daß ein Reswitching in einem Fall mit n Kapitalgütern mit Sicherheit nur dann auszuschließen ist, wenn eine Technik T_a in diesem Sinne "kapitalintensiver" ist als eine andere Technik T_b . Dies ist immer dann der Fall, wenn bei zwei beliebigen Techniken T_1 und T_2 alle sich entsprechenden Aktivitäten eindeutig nach ihrer "Kapitalintensität" geordnet werden können, d. h. wenn gilt $a_0 \geq b_0$, $a \geq b$ und $A \geq B$, wobei die so definierte Kapitalintensität von der Höhe des Zinses völlig unabhängig ist. Daß diese Bedingung in hohem Grade restriktiv und damit auch sehr unwahrscheinlich ist, braucht wohl kaum mehr besonders betont zu werden.

Man kann daher am Ende dieser Ausführungen nur zu dem Schluß gelangen, daß weder in einem Zwei-Sektoren-Modell noch in einem allgemeinen Modell mit n verschiedenen Kapitalgütern im allgemeinen ein Reswitching ausgeschlossen werden kann und daß es deshalb weder im Zwei-Sektoren-Modell noch im allgemeinen Modell mit n Kapitalgütern möglich ist, die verschiedenen alternativ möglichen Techniken einer bestimmten gegebenen Technologie so zu ordnen, daß bei alternativen Lohn-Zins-Relationen jede Technik nur einmal als die kostengünstigste erscheint. Damit ist es aber auch im allge-

meinen nicht möglich, einer bestimmten Technik eine ganz bestimmte Kapitalintensität und damit einen ganz bestimmten Punkt auf einer neoklassischen Produktionsfunktion zuzuordnen. Zurückzuführen ist diese Tatsache auf die Existenz vieler heterogener Kapitalgüter, über die die menschliche Arbeitskraft nur indirekt in das Konsumgut eingeht.

Die Vielzahl und Heterogenität der Kapitalgüter ist jedoch nicht die einzige ökonomische Ursache für ein Reswitching von Techniken. Damit kann aber auch die Vielzahl heterogener Kapitalgüter nicht allein dafür verantwortlich gemacht werden, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, die ökonomische Realität durch eine neoklassische Produktionsfunktion zu beschreiben und daraus den Schluß zu ziehen, daß zwischen dem Lohn-Zins-Verhältnis und der Höhe der Kapitalintensität in einer Volkswirtschaft eine monotone Beziehung mit positiver Steigung besteht, so daß mit steigendem Lohn-Zins-Verhältnis die Kapitalintensität einer Volkswirtschaft zunimmt. Vielmehr läßt sich zeigen, daß eine weitere Ursache für ein Reswitching von Techniken in der zeitlichen Verbundenheit der Produktion begründet ist, die dadurch entsteht, daß Kapitalgüter in der Regel eine Lebensdauer von mehreren Perioden besitzen, innerhalb derer sie einem kontinuierlichen Leistungsverzehr unterworfen sind.¹⁾ Diesem Phänomen eines Reswitchings infolge zeitlich verbundener Produktion wollen wir uns im folgenden zuwenden.

1) Auf die (als durchaus normal empfundene) Möglichkeit eines Reswitching infolge zeitlich verbundener Produktion hat zuerst Sraffa hingewiesen. Vgl. P. Sraffa, *The Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge 1960, Reprinted 1963, insbes. Kap. XII

e) Reswitching bei zeitlich verbundener Produktion

Betrachtet man die Kapitalgüter einer Volkswirtschaft nicht aus der Sicht einer in der Realität existierenden Vielfalt von heterogenen Gütern bzw. Anlagen, die zur Erzeugung von Konsumgütern beitragen, sondern von ihrer Eigenschaft her, auf Grund deren sie in der Lage sind, Arbeitsleistungen zu "konservieren" und in Form von "indirekter Arbeit" von einer Periode zur anderen zu transformieren, um sie dann in Konsumgüter späterer Produktionsperioden wieder einfließen zu lassen, so erkennt man, daß die Heterogenität der zu einem bestimmten Zeitpunkt existierenden Kapitalgüter eigentlich nur eine momentane Ausprägung der sich insgesamt in einer Volkswirtschaft gerade auf bestimmten Produktionsumwegen befindlichen indirekten Arbeit darstellt bzw. als die in einem bestimmten Zeitpunkt auf bestimmten Produktionsumwegen geronnene Arbeit aufgefaßt werden kann.

Zerlegt man gedanklich dieses Spektrum und greift sich einen solchen eingeschlagenen Produktionsumweg bzw. Produktionsprozeß heraus, so kann man den aus diesem Produktionsprozeß insgesamt resultierenden zeitlichen Fluß an Güteroutput auf den Einsatz von in vergangenen Perioden nicht konsumierten Gütern sowie auf einen zeitlichen Strom von Arbeitsaufwand zurückführen. Ein bestimmter Produktionsprozeß ist demnach durch einen ganz bestimmten Ertragsfluß infolge eines ganz bestimmten Aufwandflusses gekennzeichnet.

Unterstellt man nun, daß ein Güteroutput gewöhnlich auf verschiedene Weise erstellt werden kann, daß also prinzipiell unterschiedliche Produktionsumwege eingeschlagen werden können, so wäre es immerhin denkbar, jeden alternativ möglichen Produktionsumweg bzw. Produktionsprozeß als eine Aktivität oder eine Technik zu betrachten und dann jene Technik als kapitalintensiver zu definieren, die bei einem höheren Lohn-

Zins-Verhältnis zur Anwendung gelangt.¹⁾ Verfolgt man diesen Weg, so kann man nämlich ohne weiteres die Prämisse vieler heterogener Kapitalgüter, die von den Konsumgütern wesensmäßig verschieden sind, fallen lassen und stattdessen von einem Gut ausgehen, das sowohl konsumiert als auch investiert werden kann und das letztlich ausschließlich auf den Einsatz des Faktors Arbeit zurückgeführt werden kann. Gelänge es dann noch, alle zu einem bestimmten Zeitpunkt alternativ möglichen Produktionsumwege bzw. Produktionsprozesse so zu ordnen, daß jeder Produktionsumweg bei alternativen Lohn-Zins-Relationen nur einmal als kostengünstigstes Produktionsverfahren erscheint, so könnte man die verschiedenen Produktionsumwege eindeutig nach ihrer "Kapitalintensität" ordnen und hätte so die von der neoklassischen Theorie angenommene Monotonie zwischen Lohn-Zins-Relation und Kapitalintensität als realistisch und ökonomisch begründet verifiziert. Daß aber auch in diesem Fall einer Ein-Gut-Wirtschaft ein Reswitching nicht ausgeschlossen werden kann, wenn man eine zeitlich verbundene Produktion un-

-
- 1) Betrachtet man eine einzelne Maschine bzw. ein einzelnes technisches Aggregat, mit dessen Hilfe ein ganz bestimmtes Gut produziert wird, als Produktionsprozeß, so müßte man ihn als Aktivität bezeichnen. Bezeichnet man dagegen die Gesamtheit aller mit dem Investitionsaufwand einer bestimmten Periode erstellten Aggregate zur Erstellung eines ganzen Güterbündels als einen Produktionsprozeß, so kann er als Technik bezeichnet werden. Dieser Betrachtungsweise wollen wir uns im folgenden anschließen. Die Technologie einer Zeit besteht bei dieser vertikalen Betrachtungsweise aus der Gesamtheit aller zu diesem Zeitpunkt bekannten alternativ möglichen effizienten Produktionsprozesse. Die typische Wirtschaft kann man sich dann aus einer zeitlich gestaffelten Reihe von Prozessen beschränkter Länge und (sofern man einen technischen Fortschritt nicht ausschließt) unterschiedlichen technischen Niveaus zusammengesetzt vorstellen. Vgl. J. R. Hicks, Die österreichische Kapitaltheorie und ihre Wiedergeburt in der modernen Wirtschaftswissenschaft, Vortrag vom Juni 1971 in Wien, anläßlich der hundertsten Wiederkehr des Erscheinens von Carl Mengers "Grundsätze der Volkswirtschaftslehre", abgedruckt in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. 32 (1972), S. 91-101, hier S. 94

terstellt, soll im folgenden an einem Modell nachgewiesen werden.¹⁾

Wir gehen von einem Ein-Sektor-Modell aus, in dem ein einziges Gut produziert wird, das entweder konsumiert oder investiert werden kann. Wird es investiert, so muß es mit Hilfe des Faktors Arbeit in "Maschinen" verwandelt werden, deren Form nicht mehr verändert werden kann. Die Zeit wird in sog. Produktionsperioden von gleicher Länge eingeteilt. Das Gut ist verderblich und hat eine Lebensdauer von höchstens einer Periode, sofern es nicht in "Maschinen" transformiert wird. Diese haben eine Lebensdauer von mehr als einer Periode. Das Gut wird mit Hilfe von Arbeit und "Maschinen" erstellt, kann aber auch ohne technische Hilfsmittel erzeugt werden. Der Faktor Arbeit sei homogen. Dagegen kann das Gut in verschiedene "Maschinen" transformiert werden, die sich voneinander durch den für jede "Maschine" charakteristischen zeitlichen Aufwand- und Ertragsfluß unterscheiden.

Die Produktionstechnik wird dann gekennzeichnet durch einen (aggregierten) Ertragsfluß, der gleich dem in den künftigen Perioden zu erwartenden Output ist, der sich auf Grund der in der Ausgangsperiode 0 vorgenommenen Gesamtinvestition und des damit verbundenen Arbeitsaufwandes sowie der dadurch induzierten Folgekosten bis zum Ende der Lebensdauer dieser Investition ergibt. Dabei setzen sich die Folgekosten aus dem zum Betreiben der "Maschinen" erforderlichen Arbeitsaufwand, aus den zur Betriebsbereitschaft notwen-

1) Vgl. zu den folgenden Ausführungen D. M. Nuti, Capitalism, Socialism and Steady Growth, in: The Economic Journal, Vol. 80 (1970), S. 32 - 57, insbes. S. 34 - 38
Vor Nuti haben außer Sraffa auch J. Robinson, McManus und Pasinetti Modelle, die die zeitliche Verbundenheit der Produktion berücksichtigen, verwendet. Vgl. J. Robinson, The Production Function ..., a.a.O. S. 81 ff; M. McManus, Process Switching in the Theory of Capital, in: Economica, Vol. 30 (1963), S. 109 ff; L. L. Pasinetti, Changes in the Rate of Profit and Switches of Techniques, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80 (1966), S. 503-517

digen Folgeinvestitionen sowie aus den zur Produktion laufend erforderlichen Betriebsmitteln zusammen.

Saldiert man die in künftigen Perioden anfallenden Folgeinvestitionen und den laufenden Aufwand für Betriebsmittel mit dem Ertrag aus der gleichen Periode, so verbleibt ein Netto-Ertragsfluß an Gütern, dessen zeitliche Sequenz durch die Menge $\{q\}$ mit den Elementen $q_t \geq 0$ für $t = 0, 1, 2 \dots n$ gegeben sei, wobei angenommen wird, daß $\sum_{t=0}^n q_t > 0$ ist, d. h. daß der Gesamtertrag aller Perioden strikt positiv ist. Diesem Netto-Ertragsfluß an Gütern steht ein zeitlicher Fluß von Arbeitsaufwand gegenüber, der einerseits zum Bau der "Maschinen" in der Periode 0 und zur Erstellung der zur Betriebsbereitschaft erforderlichen Folgeinvestitionen notwendig ist und andererseits zur Erzeugung des Outputs laufend erforderlich ist. Die zeitliche Sequenz dieses Arbeitsinputs sei durch die Menge $\{a\}$ gegeben, deren Elemente a_t für $t = 0, 1, 2 \dots n$ alle positiv seien. Der Arbeitseinsatz einer Periode wird mit dem realen (d. h. in Gütereinheiten ausgedrückten) Lohnsatz w am Ende dieser Periode vergütet, der exogen fixiert sei. Bezeichnet man schließlich mit r den Zinssatz einer Volkswirtschaft, so ist der mit diesem Zinssatz diskontierte Gegenwartswert des Investitionsertrags

$$V = (q_0 - a_0 w) + (q_1 - a_1 w) \cdot (1+r)^{-1} + (q_2 - a_2 w) \cdot (1+r)^{-2} \\ + \dots + (q_n - a_n w) \cdot (1+r)^{-n}$$

bzw.
$$V = \sum_{t=0}^n (q_t - a_t w) \cdot (1+r)^{-t} \quad (18)$$

Setzt man nun voraus, daß das gesamte Produkt auf die Wirtschaftssubjekte verteilt wird, so verbleibt für die Unternehmer bei exogen gegebenem Lohnsatz ein Zinssatz, der gerade so hoch ist, daß der Gegenwartswert des Investitionsertrags Null ist.

Es ist nun unmittelbar einsichtig, daß die Höhe dieses

sog. internen Zinsfußes bei verschiedenen Lohnsätzen unterschiedlich hoch ist, so daß auch in diesem Fall der zeitlich verbundenen Produktion eine bestimmte Produktionstechnik durch eine Funktion zwischen dem Lohnsatz und der Profitrate $f(r, w) = 0$ charakterisiert werden kann. Um diese Funktion in expliziter Form zu erhalten, lösen wir die Beziehung

$$\sum_{t=0}^n (q_t - a_t w) \cdot (1+r)^{-t} = 0 \quad (18a)$$

nach w auf und erhalten dann die Faktorpreisbeziehung

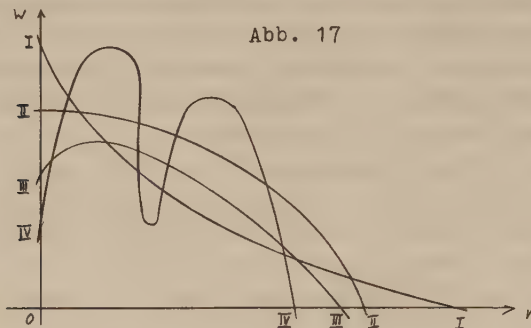
$$w = \frac{\sum_{t=0}^n q_t (1+r)^{-t}}{\sum_{t=0}^n a_t (1+r)^{-t}} \quad (19)$$

Diese Beziehung besitzt die folgenden Eigenschaften:¹⁾

- (i) Für $r = 0$ ist $w_{\max} = \sum_{t=0}^n q_t / \sum_{t=0}^n a_t > 0$.
- (ii) Es existiert ein Zinssatz $r_{\max}$, der dann erreicht wird, wenn $w = 0$ ist. Dieser maximale Zinssatz ist dann mathematisch eindeutig, wenn in der Reihe $\sum_{t=0}^n q_t (1+r)^{-1}$ im Zähler der Beziehung (19) nur ein Vorzeichenwechsel auftritt. Dies soll im folgenden vorausgesetzt werden.
- (iii) Aus (i) und (ii) folgt, daß $w > 0$ für $0 \leq r < r_{\max}$ ist. Danach ist die Faktorpreis-kurve für den Bereich $0 < r < r_{\max}$ definiert.
- (iv) Die erste Ableitung der Faktorpreiskurve ist für $r = r_{\max}$ negativ, kann im Bereich $0 \leq r < r_{\max}$ aber auch positive Werte annehmen. Die Faktorpreiskurve kann deshalb auch "Höcker" aufweisen, wie es in Abbildung 17 bei Kurve IV der Fall ist.
- (v) Da wir $a_t > 0$ für $t = 0, 1, 2 \dots n$ vorausgesetzt haben, ist es ausgeschlossen, daß die Faktorpreiskurve die Form einer Geraden annimmt.

1) Vgl. D. M. Nuti, Capitalism ..., a.a.O. S. 37

Auf Grund dieser Eigenschaften besitzt die Faktorpreiskurve einen der in Abbildung 17 skizzierten Verläufe.



Betrachten wir nun zwei Produktionstechniken α und β , so erhalten wir zwei Faktorpreiskurven, die sich im Definitionsbereich mindestens einmal schneiden, sofern man voraussetzt, daß nicht eine der beiden Techniken im gesamten Bereich dominant ist. Dabei kann vor allem, wie schon aus Abbildung 17 unmittelbar zu erkennen ist, nicht ausgeschlossen werden, daß sich zwei Faktorpreiskurven im Definitionsbereich auch mehr als einmal schneiden, wie das z. B. bei den Faktorpreiskurven III und IV der Fall ist. Deshalb kann auch im Fall einer zeitlich verbundenen Produktion selbst unter der Voraussetzung, daß nur ein homogenes Gut erzeugt wird, das entweder konsumiert oder investiert werden kann, ein Reswitching von Techniken nicht ausgeschlossen werden. Daß der Fall eines Reswitching auch hier wohl als Normalfall betrachtet werden muß, ergibt sich schon aus der Anzahl der Schnittpunkte, die die Faktorpreiskurven der beiden Techniken α und β aufweisen. Diese ergeben sich nämlich aus der Gleichung

$$\frac{\sum_{t=0}^n q_t^{\alpha} (1+r)^{-t}}{\sum_{t=0}^n a_t^{\alpha} (1+r)^{-t}} - \frac{\sum_{t=0}^n q_t^{\beta} (1+r)^{-t}}{\sum_{t=0}^n a_t^{\beta} (1+r)^{-t}} = 0$$

die insgesamt n Lösungen besitzt. Unmittelbar zwingend

folgt diese Vermutung jedoch aus der Tatsache, daß man die durch eine zeitlich verbundene Produktion verursachten Input-Output-Ströme ebenfalls durch Matrizen darstellen kann, die den Technikmatrizen des allgemeinen Modells mit n verschiedenen Kapitalgütern formal äquivalent sind.

Durchläuft ein Gut bis zu seiner vollen Ausreifung mehrere Produktionsperioden, so kann es nämlich in jeder dieser Perioden als Zwischenprodukt mit unterschiedlichem Reifegrad interpretiert werden. Diese kann man aber auch als unterschiedliche Güter interpretieren und deshalb die Produktionsumwege α und β entsprechend der Anzahl ihrer Produktionsperioden in Aktivitäten zerlegen. Die Gesamtheit der Aktivitäten eines Produktionsumweges lassen sich dann in einer Matrix zusammenfassen, die mit einer Technikmatrix für eine Vielzahl heterogener Güter durchaus vergleichbar ist.¹⁾ Das hat zur Folge, daß sich das Reswitching von Techniken trotz zwei verschiedener ökonomischer Ursachen formal auf dasselbe mathematische Kalkül zurückführen läßt.

An dieser Stelle erhebt sich natürlich unmittelbar die Frage, ob die von uns aufgezeigten beiden ökonomischen Ursachen für ein Reswitching von Techniken nicht nur zwei unterschiedliche Ausprägungen von letztlich ein und derselben Ursache sind. Dies ist in gewisser Weise tatsächlich der Fall. Denn man kann die Meinung vertreten, daß in beiden Fällen die letzte Ursache wohl in der Aufgabe der malleability-assumption zu suchen ist, nämlich im einen Fall durch die angenommene Irreversibilität eines einmal eingeschlagenen Produktionsumweges und im anderen Fall durch die Annahme, daß einmal produzierte physische Kapitalgüter in ihrer Gestalt nicht mehr verändert werden können.

Folgt man dieser Meinung, so muß man wohl einräumen,

1) Vgl. L. L. Pasinetti, Changes ..., a.a.O. S. 509

daß die von uns herausgestellten beiden ökonomischen Ursachen für ein Reswitching nur auf Grund zweier verschiedener Betrachtungsweisen ein und derselben Sache, nämlich des Kapitalbegriffs, aufgedeckt wurden. Tatsächlich kommen wir bei unserer Untersuchung der zeitlich verbundenen Produktion den Vorstellungen der österreichischen Kapitaltheorie recht nahe, wonach das Wesen des Kapitals darin zu sehen ist, daß es Produktionsumwege ermöglicht und das Ausmaß des eingesetzten Kapitals an der Länge der "durchschnittlichen Produktionsperiode" gemessen werden kann.¹⁾ Demgegenüber bewegen wir uns mit unserem Modell vieler heterogener Kapitalgüter im Rahmen der Fixkapitaltheorie, die in ihren Grundzügen auf J. B. Clark zurückgeht, wobei wir aber von der für J. B. Clark zentralen Annahme eines homogenen Realkapitalstocks abgegangen sind.²⁾ Sowohl die österreichische Kapitaltheorie als auch die Fixkapitaltheorie von J. B. Clark stellen aber beide nur zwei alternative Theorien zur Erklärung dessen, was wir Kapital nennen, dar. Wir können deshalb als Ergebnis unserer Diskussion des Kapitalbegriffs festhalten, daß es, sobald man in der Kapitaltheorie die malleability-assumption aufgibt, zu einem Reswitching von Techniken kommen kann, und daß es deshalb ohne diese Annahme nicht mehr möglich ist, zwischen dem Lohn-Zins-Verhältnis und der "Kapitalintensität" von einzelnen Produktionsverfahren eine monotone Beziehung zu ermitteln.

1) Vgl. C. C. von Weizsäcker, *Steady State Capital Theory*, Berlin, Heidelberg, New York 1971, Part II

2) Ebenda, Part III

3. Zusammenfassung

Versucht man, das Fazit aus den Ergebnissen dieses Kapitels zu ziehen, so ist es wohl nicht zu vermeiden, daß die bisher mit Hilfe der neoklassischen Theorie abgeleiteten Ergebnisse relativiert werden. Wie wir nämlich im Verlaufe der Diskussion um den neoklassischen Kapitalbegriff nachweisen konnten, besteht die eigentliche Schwäche der neoklassischen Theorie darin, daß sie die Produktion auf zwei Produktionsfaktoren - Arbeit und Kapital - zurückführt, von denen aber nur einer, nämlich der Faktor Arbeit, als ursprünglicher Produktionsfaktor bezeichnet werden kann, der uns von Natur aus zur Verfügung steht. Dagegen läßt sich der Faktor Kapital selbst wieder auf den Einsatz des Faktors Arbeit in früheren Perioden zurückführen, so daß Kapital so gesehen letztlich nichts anderes als geronnene Arbeit ist. Vom Faktor Arbeit unterscheidet er sich allerdings dadurch, daß durch seine Fähigkeit, Arbeitsleistungen zu "konservieren", wertschöpfende Produktionsumwege ermöglicht werden. Andererseits ist zur Erzeugung von Kapital ein Konsumverzicht notwendig, der nur durch das Entgelt einer Zeitpräferenzrate, nämlich durch die Entlohnung mit einem Zinssatz, erreicht werden kann. Somit ist der Faktor Kapital zwar ein eigener Produktionsfaktor, aber der Umfang, in dem er zur Verfügung steht, bzw. sein Wert ist nicht unabhängig von der Höhe von Lohn- und Zinssatz. Die Schwäche der neoklassischen Theorie besteht demnach in der Angreifbarkeit des neoklassischen Kapitalbegriffs.

Die neoklassische Theorie setzt voraus, daß das Kapital jederzeit kostenlos verformbar ist und somit jederzeit ein bestimmtes Produktionsverfahren (auch wenn es schon in Anwendung ist) kostenlos durch ein anderes Produktionsverfahren ersetzt werden kann. Diese Annahme ist - zumindest kurzfristig - wenig realistisch. Läßt man aber diese malleability-assumption fallen und geht stattdessen von einer Vielzahl unverformbarer Ka-

pitalgüter oder von der Irreversibilität der einmal eingeschlagenen Produktionsumwege aus, so ergeben sich für die Definition dessen, was in der neoklassischen Produktionsfunktion als Kapital bezeichnet wird, nicht unbeträchtliche Schwierigkeiten. Versucht man nämlich wegen der Abhängigkeit des Wertes des Kapitalstocks von den Faktorpreisen den Kapitalbegriff unabhängig von irgendwelchen Bewertungen allein durch ein System technischer Inputkoeffizienten zu erfassen, so wird man feststellen, daß eine bestimmte Technik bei mehreren alternativen Lohn-Zins-Relationen zur Anwendung gelangen kann, was zur Folge hat, daß zwischen dem Einsatz von alternativen Techniken und der Höhe der Lohn-Zins-Relation keine monotone Beziehung mehr ermittelt werden kann. Es ist deshalb, abgesehen von den Bewertungsproblemen, die mit einem solchen Kapitalbegriff verbunden sind, unmöglich, die neoklassische Theorie auf einem solchen Kapitalbegriff zu begründen, da die durch die neoklassischen Annahmen implizierte strikte Positivität der Substitutionselastizität bei Verwendung eines solchen Kapitalbegriffs nicht mehr allgemein gesichert ist.

Die neoklassische Theorie kann sich demnach nur auf einen Kapitalbegriff stützen, bei dem das Kapital quantitativ erfaßbar ist. Dies ist aber, wie wir ebenfalls im Verlaufe der Diskussion des Kapitalbegriffs nachweisen konnten, nur möglich, wenn ein Faktorpreis exogen determiniert ist. Dann ist bei gegebener Technologie auch der zweite Faktorpreis eindeutig determiniert und folglich auch die Höhe des Kapitalstocks bekannt. In diesem Fall läßt sich nach wie vor zeigen, daß bei steigendem Lohn-Zins-Verhältnis die Kapitalintensität zunimmt, und deshalb das neoklassische Instrumentarium anwenden. Es ist in diesem Falle allerdings nicht gesagt, daß bei steigender Kapitalintensität immer neue Techniken zur Anwendung gelangen, die bisher als nicht kostenminimal galten, sondern es können

darunter auch durchaus Techniken sein, die schon bei einem früheren niedrigeren Lohn-Zins-Verhältnis einmal zur Anwendung gelangt waren. Dies ändert jedoch nichts an der Tatsache, daß sie unter der neuen Lohn-Zins-Konstellation als kapitalintensiver erscheinen als früher.

Die Verwendung eines solchen Kapitalbegriffs in der neoklassischen Theorie führt allerdings dazu, daß die neoklassische Theorie nicht mehr fähig ist, die Höhe der Faktorpreise aus der relativen Seltenheit der Faktoren zu erklären. Vielmehr muß die neoklassische Theorie in diesem Fall als ein Modellbild aufgefaßt werden, das die Realität zu beschreiben und zu interpretieren, nicht aber zu analysieren vermag. Damit besitzt man zwar immer noch ein geschlossenes und logisch konsistentes Modellgebäude zur Beschreibung einer Ein-Gut-Welt, das wohl als die bisher beste "Parabel" zur Beschreibung der Komplexität der volkswirtschaftlichen Produktionszusammenhänge bezeichnet werden kann, doch darf man andererseits die "neoklassische Parabel" in ihrem Aussagegehalt auch nicht überschätzen, wie das lange Zeit durch ihren Anspruch bzw. durch den ihr unterstellten Anspruch, die gesamte Produktion und Verteilung von Gütern gewissermaßen auf naturgesetzähnliche Gesetzmäßigkeiten zurückführen zu wollen, geschehen ist.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- Ahmad, S.: "On the Theory of Induced Invention" in:
The Economic Journal, Vol. 76 (1966), S. 344 - 357
- Albert, H. (Hrsg.), Theorie und Realität, Ausgewählte
Aufsätze zur Wissenschaftslehre der Sozialwissen-
schaften, Tübingen 1964
- Albert, H., Traktat über kritische Vernunft, Tübingen
1968
- Allen, R.G.D., Macro-Economic Theory, London, New York
1967, Reprint 1968
- Allen, R.G.D., Mathematical Analysis for Economists,
London 1938, deutsch: Mathematik für Volks- und
Betriebswirte, aus dem Englischen übersetzt von
E. Kosiol, 3. Aufl., Berlin 1956
- Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S., Solow, R.M.:
"Capital-Labor Substitution and Economic Effi-
ciency" in: The Review of Economics and Stati-
stics, Vol. 43 (1961), S. 225 - 250
- Beckmann, M.J., und Künzi, H.P., Mathematik für
Ökonomen I, Berlin, Heidelberg, New York 1964
- Beckmann, M.J., Sato, R., Schupack, M.: "Alternative
Approaches to the Estimation of Production Func-
tions and of Technical Change" in: International
Economic Review, Vol. 13 (1972), S. 33 - 52
- Böhm-Bawerk, E.v., Positive Theorie des Kapitals,
4. Aufl., Jena 1921
- Bronfenbrenner, M.: "A Note on Relative Shares and
the Elasticity of Substitution" in: The Journal
of Political Economy, Vol. 68 (1968),
S. 284 - 287
- Bronstein, I.N., und Semendjajew, K.A., Taschenbuch
der Mathematik, aus dem Russischen übersetzt von
V. Ziegler, 9. Aufl., Zürich, Frankfurt (Main)
1969
- Brown, M., On the Theory and Measurement of Techno-
logical Change, Cambridge 1966, 2. Aufl., Cam-
bridge 1968
- Brown, M., und de Cani, J.S.: "A Measure of Technolo-
gical Employment" in: The Review of Economics
and Statistics, Vol. 45 (1963), S. 386 - 394

- Brown, M., und de Cani, J.S.: "Technological Change and the Distribution of Income" in: *International Economic Review*, Vol. 4 (1963), S. 289 - 309
- Brown, M., und de Cani, J.S.: "Technological Change in the United States 1950 - 60" in: *Productivity Measurement Review*, Vol. 29 (1962), S. 26 - 39
- Bruno, M., Burmeister, E., und Sheshinski, E.: "The Nature and Implications of the Reswitching of Techniques" in: *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80 (1966), S. 526 - 553
- Burmeister, E., *Stability and Causality in Two-Sector Models of Economic Growth*, Massachusetts Institute of Technology Ph. D. Thesis, May 1965
- Burmeister, E.: "The Role of the Jacobian Determinant in the Two-Sector Model" in: *International Economic Review*, Vol. 9 (1968), S. 195 - 203
- Burmeister, E., und Dobell, A.R., *Mathematical Theories of Economic Growth*, London 1970
- Carlson, S., *A Study on the Pure Theory of Production*, London 1939, reprinted New York 1969
- Champernowne, D.G.: "A Mathematical Note on Substitution" in: *The Economic Journal*, Vol. 45 (1935), S. 246 - 258
- Chang, W.W.: "A Two-Sector Model of Economic Growth with Induced Technical Progress" in: *The Canadian Journal of Economics*, Vol. 3 (1970), S. 199 - 212
- Chang, W.W.: "A Model of Economic Growth with Induced Bias in Technical Progress" in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 39 (1972), S. 205 - 212
- Clark, J.B.: "Capital and its Earnings" in: *Publications of the American Economic Association*, Vol. 3 (1888)
- Clark, J.B.: "Possibility of a Scientific Law of Wages" in: *Publications of the American Economic Association*, Vol. 4, Baltimore 1889, S. 49
- Clark, J.B., *The Distribution of Wealth*, New York, London 1899, Neuauf. 1924
- Clemhout, S.: "The Class of Homothetic Isoquant Production Functions" in: *The Review of Economic Studies*, Vol. 35 (1968), S. 91 - 104

- Cobb, C.W., und Douglas, P.H.: "A Theory of Production" in: The American Economic Review, Vol. 18 (1928), Suppl. I, S. 139 - 165
- David, P.A., und van de Klundert, Th.: "Biased Efficiency Growth and Capital-Labor Substitution in the US 1899 - 1960" in: The American Economic Review, Vol. 55 (1965), S. 357 - 394
- Dhrymes, P.J.: "Some Extensions and Tests for the CES-Class of Production Functions" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 357 - 366
- Diamond, P.A.: "Disembodied Technical Change in a Two-Sector Model" in: The Review of Economic Studies, Vol. 32 (1965), S. 161 - 168
- Diamond, P.A., und McFadden, D., Identification of the Elasticity of Substitution and the Bias of Technical Change. An Impossibility Theorem; Working Paper Nr. 62, Institute of Business and Economic Research, University of California, Berkeley 1968 (mimeographed)
- Dietrich, G., und Stahl, H., Grundzüge der Matrizenrechnung, Stuttgart 1965
- Diwan, R.K.: "An Empirical Estimate of Constant Elasticity of Substitution Production Function" in: Econometrica, Vol. 32 (1964), S. 662 - 663
- Dobell, R.: "A Symposium on CES Production Functions: Extensions and Comments; Introductory Remarks" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 50 (1968), S. 443 - 445
- Drandakis, E.M.: "Factor Substitution in the Two-Sector Growth Model" in: The Review of Economic Studies, Vol. 30 (1963), S. 217 - 228
- Drandakis, E.M., und Phelps, E.S.: "A Model of Induced Invention, Growth and Distribution" in: The Economic Journal, Vol. 76 (1966), S. 823 - 840
- Ferguson, C.E.: "Cross-Section Production Functions and the Elasticity of Substitution in American Manufacturing Industry" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 45 (1963), S. 305 - 313
- Ferguson, C.E.: "Substitution, Technical Progress, and Returns to Scale" in: The American Economic Review, Vol. 55 (1965), Papers and Proceedings, S. 296 - 305

- Ferguson, C.E.: "The Elasticity of Substitution and the Savings Ratio in the Neoclassical Theory of Growth" in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 79 (1965), S. 465 - 471
- Ferguson, C.E.: "Time-Series Production Functions and Technological Progress in American Manufacturing Industry" in: Journal of Political Economy, Vol. 73 (1965), S. 135 - 147
- Ferguson, C.E.: "Neoclassical Theory of Technical Progress and Relative Factor Shares" in: The Southern Economic Journal, Vol. 34 (1967/68), S. 490 - 504
- Ferguson, C.E.: The Neoclassical Theory of Production and Distribution, Cambridge 1969
- Friedman, M.: "Further Notes on Elasticity of Substitution - I. Note on Dr. Machlups Article" in: The Review of Economic Studies, Vol. 3 (1935/36), S. 147 - 148
- Frisch, H.: "Die CES-Funktion" in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. 24 (1964), S. 419 - 444
- Fuchs, V.R.: "Capital Substitution. A Note" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 45 (1963), S. 436 - 438
- Gahlen, B.: Die Überprüfung produktionstheoretischer Hypothesen für Deutschland (1850 - 1913). Eine kritische Untersuchung, Tübingen 1968
- Gahlen, B.: "Einige Bemerkungen zum Fortschritt der Wachstumstheorie" in: W.G. Hoffmann (Hrsg.), Untersuchungen zum Wachstum der deutschen Wirtschaft, Tübingen 1971
- Gahlen, B.: Der Informationsgehalt der neoklassischen Wachstumstheorie für die Wirtschaftspolitik (Die Einheit der Gesellschaftswissenschaften, Bd. 12, Hrsg. E. Boettcher, Tübingen 1972
- Georgescu-Roegen, N.: "The Aggregate Linear Production Funktion" in: Activity Analysis of Production and Allocation, edited by T.C. Koopmans, New York, London 1951, S. 98 - 115
- Großes Handbuch der Mathematik, herausgegeben von W. Gellert u. a., Köln 1969
- Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. I: Die Produktion, 12. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York 1966

- Hahn, F.H., und Matthews, R.C.O.: "The Theory of Economic Growth: A Survey" in: The Economic Journal, Vol. 74 (1964), S. 779 - 902
- Harcourt, G.C.: "Some Cambridge Controversities in the Theory of Capital" in: The Journal of Economic Literature, Vol. 7 (1969), S. 369 - 405
- Harrod, R.F.: "Review of Joan Robinsons Essay in the Theory of Employment" in: The Economic Journal, Vol. 47 (1937), S. 326 - 330
- Harrod, R.F., Dynamische Wirtschaft, Wien, Stuttgart 1949
- Helmstädter, E.: "Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität" in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 126 (1964), S. 177 - 195
- Helmstädter, E., Der Kapitalkoeffizient. Eine kapitaltheoretische Untersuchung, Stuttgart 1969
- Hesse, H., und Gahlen, B.: "Die Beziehungen zwischen eigentlicher und historischer Substitutionselastizität bei technischem Fortschritt" in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 99 (1967 II), S. 175 - 224
- Heubes, J.: "Substitutionselastizität und Wachstumsrate des Outputs" in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 187 (1973), S. 128 - 133
- Hicks, J.R., The Theory of Wages, London 1932, 2. Aufl. London 1963
- Hicks, J.R.: "A Note on Mr. Kahn's Paper" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 78 - 80
- Hicks, J.R.: "Distribution and Economic Progress. A Revised Version" in: The Review of Economic Studies, Vol. 4 (1936/37), S. 1 - 12
- Hicks, J.R., Capital and Growth, Oxford 1965
- Hicks, J.R.: "Die österreichische Kapitaltheorie und ihre Wiedergeburt in der modernen Wirtschaftswissenschaft", Vortrag v. Juni 1971 in Wien anlässlich der 100. Wiederkehr des Erscheinens von Carl Mengers "Grundsätze der Volkswirtschaftslehre", abgedruckt in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. 32 (1972), S. 91 - 101

- Hildebrand, G.H., und Liu, T.C., Manufacturing Production Functions in the United States, 1957, Ithaca 1965
- Inada, K.I.: "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization" in: The Review of Economic Studies, Vol. 30 (1963), S. 119 - 127
- Inada, K.I.: "On the Stability of Growth Equilibria in Two-Sector Models" in: The Review of Economic Studies, Vol. 31 (1964), S. 127 - 142
- Jones, R.W.: "Neutral Technological Change and the Isoquant Map" in: The American Economic Review, Vol. 55 (1965), S. 848 - 855
- Kahn, R.F.: "Notes on Elasticity of Substitution: III. The Elasticity of Substitution and the Relative Share of a Factor" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 72 - 78
- Kahn, R.F.: "Two Applications of the Concept of Elasticity of Substitution" in: The Economic Journal, Vol. 45 (1935), S. 242 - 245
- Kaldor, N.: "A Model of Economic Growth" in: The Economic Journal, Vol. 47 (1957), S. 591 - 624
- Kaldor, N., und Mirrlees, J.A.: "A New Model of Economic Growth" in: The Review of Economic Studies, Vol. 29 (1962), S. 174 - 192
- Kendrick, J.W.: "Comment on Solow" in: The Behavior of Income Shares, S. 140 - 142
- Kendrick, J.W., und Sato, R.: "Factor Prices, Productivity and Economic Growth" in: The American Economic Review, Vol. 53 (1963), S. 974 - 1003
- Kennedy, Ch.: "Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution" in: The Economic Journal, Vol. 74 (1964), S. 541 - 547
- Kennedy, Ch.: "Samuelson on Induced Innovation" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 442 ff
- Keynes, J.M.: "Relative Movements of Real Wages and Output" in: The Economic Journal, Vol. 49 (1939), S. 34 - 49
- King, W.I., The Wealth and Income of the People of the United States, New York 1915

- König, H.: "Über einige Wachstumsprobleme in Zwei-Sektoren-Modellen bei Faktorsubstitution" in: Beiträge zur Produktions- und Wachstumstheorie, herausg. v. W. Krelle, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 44, Berlin 1966, S. 27 - 47
- Körth, H., u. a. (Hrsg.), Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, Opladen 1972
- Kravis, J.: "Relative Income Shares in Fact and Theory" in: The American Economic Review, Vol. 49 (1959), S. 917 - 949
- Krelle, W., Preistheorie, Tübingen, Zürich 1961
- Krelle, W., Produktionstheorie, Tübingen 1969
- Kurz, M.: "A Two-Sector Extension of Swan's Model of Economic Growth" in: International Economic Review, Vol. 4 (1963), S. 68 - 79
- Kuznets, S., National Product since 1869, National Bureau of Economic Research, New York 1936
- Kuznets, S., National Income and its Composition, 2 Bde., National Bureau of Economic Research, New York 1941
- Kuznets, S.: "Long-Term Changes in the National Income of the United States of America since 1870" in: Income and Wealth of the United States, Trends and Structure, edited by S. Kuznets; Income and Wealth Series II, Baltimore 1952, S. 135 ff
- Lerner, A.P.: "Notes on Elasticity of Substitution: II. The Diagrammatical Representation" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 68 - 71
- Lerner, A.P.: "Notes on Elasticity of Substitution" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 147 - 148
- Lerner, A.P.: "Further Notes on Elasticity of Substitution: III. The Question of Symmetry" in: The Review of Economic Studies, Vol. 3 (1935/36), S. 150 - 151
- Levhari, D.: "A Nonsubstitution Theorem and Switching of Techniques" in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 79 (1965), S. 98 - 105

- Levhari, D., und Samuelson, P.A.: "The Nonswitching Theorem is False" in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80 (1966), S. 518 - 519
- Lu, Yao-chi, und Fletcher, L.B.: "A Generalization of the CES-Production Functions" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 50 (1968), S. 449 - 452
- Lucas, R.E., Substitution Between Labor and Capital in U.S. Manufacturing 1929 - 58, unpublished Ph. D. dissertation, University of Chicago 1963
- MacFarlane, A.G.J., Analyse technischer Systeme, aus dem Englischen übersetzt von H. Böttcher und H. Winter, Mannheim 1967
- Machlup, F.: "The Commonsense of the Elasticity of Substitution" in: The Review of Economic Studies, Vol. 2 (1934/35), S. 202 - 213
- Machlup, F.: "Further Notes on Elasticity of Substitution: IV. Reply" in: The Review of Economic Studies, Vol. 3 (1935/36), S. 151 - 152
- Maddala, G.S., Technological Change in the Bituminous Coal Industry, 1919 - 54, unpublished Ph. D. dissertation, University of Chicago 1963
- Maddala, G.S., Differential Industry Effects and Differential Factor Effects of Technological Change, Memo. 36, Research Center in Economic Growth, Stanford University, March 1965
- Marshall, A., Principles of Economics, 8th. Ed. London 1920
- McFadden, D.: "Constant Elasticity of Substitution Production Functions" in: The Review of Economic Studies, Vol. 30 (1963), S. 73 - 83
- McKinnon, R.I.: "Wages, Capital Costs and Employment in Manufacturing: A Model Applied to 1947 - 58 U.S. Data" in: Econometrica, Vol. 30 (1962), S. 501 - 521
- McKinnon, R.I., The CES Production Function Applied to Two-Digit Manufacturing and Three Mining Industries for the United States, unpublished
- McManus, M.: "Process Switching in the Theory of Capital" in: Economica, Vol. 30 (1963), S. 109 ff
- Meade, J.E.: "Notes on Elasticity of Substitution: III. The Elasticity of Substitution and The Incidence of an Imperial Inhabited House Duty" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 149 - 152

- Meade, J.E.: "Notes on Elasticity of Substitution: IV. The Elasticity of Substitution and the Elasticity of Demand for one Factor of Production" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 152 - 153
- Meade, J.E., A Neoclassical Theory of Economic Growth, London 1956, 2. erw. Aufl. London 1961
- Minasian, J.R.: "Elasticities of Substitution and Constant Output Demand Curves for Labor" in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961), S. 261 - 270
- Minhas, B.S.: "An International Comparison of Factor Costs and Factor Use", Contributions to Economic Analysis, Bd. 31, Amsterdam 1963
- Morishima, M.: "Refutation of the Nonswitching Theorem" in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80 (1966), S. 520 - 525
- Morishima, M., Theory of Economic Growth, Oxford 1969
- Murata, Y., und Arrow, K.J., Unpublished Results of Estimation of Elasticities of Substitution for Two-digit Industries from Inter-country Data for two Periods, Juni 1965
- Nerlove, M.: "Recent Empirical Studies of the CES and Related Production Functions" in: The Theory and Empirical Analysis of Production, edited by M. Brown, National Bureau of Economic Research, New-York, London 1967, S. 55 - 122
- Neumann, M., Kapitalbildung, Wettbewerb und ökonomisches Wachstum, Berlin, Heidelberg, New York 1968
- Neumann, M.: "Induzierter technischer Fortschritt und das Verhältnis zwischen postkeynesianischer und neoklassischer Wachstums- und Verteilungstheorie" in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 102 (1969), S. 29 - 59
- Neumann, M., Theoretische Volkswirtschaftslehre, Band I: Einführung und Theorie des Volkseinkommens, Heidelberg 1973
- Nordhaus, W.D.: "The Optimal Rate and Directions of Technical Change" in: Essays on the Theory of Optimal Economic Growth, edited by K. Shell, Cambridge (Mass.), London 1967, S. 53 - 66
- Nuti, D.M.: "Capitalism, Socialism and Steady Growth" in: The Economic Journal, Vol. 80 (1970), S. 32 - 57
- Ott, A.E.: "Produktionsfunktion, technischer Fortschritt und Wirtschaftswachstum" in: J. Niehans u. a., Einkommensverteilung und technischer Fortschritt; Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 17, Berlin 1959, S. 155 - 202

- Pasinetti, L.L.: "Changes in the Rate of Profit and Switches of Techniques" in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80 (1966), S. 503 - 517
- Phelps, E.S.: "The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen" in: The American Economic Review, Vol. 51 (1961), S. 638 - 643
- Phelps, E.S., Golden Rules of Economic Growth - Studies of Efficient and Optimal Investment, New York 1966
- Pigou, A.C.: "The Elasticity of Substitution" in: The Economic Journal, Vol. 44 (1934), S. 232 - 241
- Pitchford, J.D.: "Growth and the Elasticity of Factor Substitution" in: Economic Record, Vol. 36 (1960), S. 491 - 504
- Popper, K.R., Das Elend des Historizismus, Tübingen 1965
- Popper, K.R., Logik der Forschung, 2. erw. Aufl., Tübingen 1966
- Preiser, E., Bildung und Verteilung des Volkseinkommens, 3. Aufl., Göttingen 1963
- Revankar, N.S., The Constant and Variable Elasticity of Substitution Production Functions: A Comparative Study in U.S. Manufacturing Industries, University of Wisconsin Systems Formulation, Methodology and Policy Workshop Paper 6616 (unpublished) 1966
- Revankar, N.S., Production Functions with Variable Elasticity of Substitution and Variable Returns to Scale, Part I; Discussion Paper Number 7, Economic Research Group, Department of Economics, State University of New York at Buffalo, 1967
- Revankar, N.S.: "A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions" in: Econométrica, Vol. 39 (1971), S. 61 - 71
- Robinson, J., The Economics of Imperfect Competition, London 1933, Reprint London 1959
- Robinson, J.: "Further Notes on Elasticity of Substitution: II. Dr. Machlup's Commonsense of the Elasticity of Substitution" in: The Review of Economic Studies, Vol. 3 (1935/36), S. 148 - 150

- Robinson, J.: "The Classification of Inventions" in: The Review of Economic Studies, Vol. 5 (1937/38), S. 139 - 142
- Robinson, J.: "The Production Function and the Theory of Capital" in: The Review of Economic Studies, Vol. 21 (1953/54), S. 81 - 106
- Robinson, J., The Accumulation of Capital, London 1956
- Robinson, J., und Naqvi, K.A.: "The Badly Behaved Production Function" in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 81 (1967), S. 579 - 591
- Samuelson, P.A.: "Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function" in: The Review of Economic Studies, Vol. 29 (1962), S. 193 - 206
- Samuelson, P.A., Foundations of Economic Analysis, New York 1965
- Samuelson, P.A.: "A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weizsäcker Lines" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 343 ff
- Samuelson, P.A.: "Rejoinder: Agreements, Disagreements, Doubts, and the Case of Induced Harrod-Neutral Change" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 47 (1965), S. 444 ff
- Sato, K.: "Growth and the Elasticity of Factor Substitution: A Comment. - How Plausible is Imbalanced Growth?" in: Economic Record, Vol. 39 (1963), S. 355 - 361
- Sato, R.: "Linear Elasticity of Substitution Production Functions" in: Metroeconomica, Vol. 19 (1967), S. 33 ff
- Sato, R.: "The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function" in: International Economic Review, Vol. 11 (1970), S. 179 - 208
- Sato, R., und Beckmann, M.J.: "Neutral Inventions and Production Functions" in: The Review of Economic Studies, Vol. 35 (1968), S. 59 - 66
- Sato, R., und Hoffman, R.F.: "Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing" in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 50 (1968), S. 453 - 460

Shephard, R.W., Theory of Cost and Production Functions, Princeton, New Jersey 1970

Solow, R.M.: "The Production Function and the Theory of Capital" in: The Review of Economic Studies, Vol. 23 (1955/56), S. 101 - 108

Solow, R.M.: "A Contribution to the Theory of Economic Growth" in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70 (1956), S. 65 - 94

Solow, R.M.: "A Skeptical Note on the Constancy of Relative Shares" in: The American Economic Review, Vol. 48 (1958), S. 618 - 631

Solow, R.M.: "Note on Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth" in: The Review of Economic Studies, Vol. 29 (1961/62), S. 48 - 50

Solow, R.M., Capital Theory and the Rate of Return, Amsterdam 1963

Solow, R.M.: "Capital, Labor and Income in Manufacturing" in: The Behavior of Income Shares. Selected Theoretical and Empirical Issues, edited by C.L. Schulze und L. Weiner, National Bureau of Economic Research, Princeton 1964, S. 101 - 128

Spitznagel, E., Die Diskussion um das Switching-Reswitching-Phänomen und ihre Bedeutung für die neoklassische Kapitaltheorie, unveröffentlichte Diplom-Arbeit, angefertigt am Volkswirtschaftl. Seminar der Universität Erlangen-Nürnberg, Nürnberg 1972

Sraffa, P., The Production of Commodities by Means of Commodities, Cambridge 1960, Reprint 1963

Swan, T.W.: "Economic Growth and Capital Accumulation" in: Economic Record, Vol. 32 (1956), S. 334 - 361

Sweezy, P.M.: "A Note on Relative Shares" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 67 - 68

Scheper, W.: "Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten" in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 177 (1965), S. 1 - 21

Schneider, E., Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil, 12. Aufl., Tübingen 1969

Stackelberg, H.v., Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre, 2. Aufl., Tübingen, Zürich 1951

Takayama, A.: "On a Two-Sector Model of Economic Growth: A Comparative Statics Analysis" in: The Review of Economic Studies, Vol. 30 (1963), S. 95 - 104

Takayama, A.: "On a Two-Sector Model of Economic Growth with Technological Progress - A Comparative Statics Analysis" in: The Review of Economic Studies, Vol. 32 (1965), S. 251 - 262

Tarshis, L.: "Notes on the Elasticity of Substitution I" in: The Review of Economic Studies, Vol. 1 (1933/34), S. 144 - 147

Uzawa, H.: "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium" in: The Review of Economic Studies, Vol. 28 (1960/61), S. 117 - 124

Uzawa, H.: "On a Two-Sector Model of Economic Growth" in: The Review of Economic Studies, Vol. 29 (1961/62), S. 40 - 47

Uzawa, H.: "On a Two-Sector Model of Economic Growth II" in: The Review of Economic Studies, Vol. 30 (1963), S. 105 - 118

Vogt, W., Theorie des wirtschaftlichen Wachstums, Berlin, Frankfurt 1968

Walras, L., Eléments d'Economie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale, Ed. définitive, Paris, Lausanne 1926

Weizsäcker, C.C.v., Wachstum, Zins und optimale Investitionsquote, Basel, Tübingen 1962

Weizsäcker, C.C.v.: "Steady State Capital Theory", Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Bd. 54, Berlin, Heidelberg, New York 1971

Wicksell, K., Über Wert, Kapital und Rente, Jena 1893

Wicksell, K., Vorlesungen über Nationalökonomie, 1. Bd., Jena 1913

Wicksell, K., Selected Papers on Economic Theory, ausgewählt von Erik Lindahl, London 1958

Wicksteed, P.H., An Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution, London 1894, Reprint London 1932

Lebenslauf

Ich wurde am 30. 1. 1945 in Sulz am Neckar geboren. Nach Besuch der Volksschule in Sulz und in Eisental bei Bühl (Baden) und des Gymnasiums in Bühl legte ich im Frühjahr 1964 die Reifeprüfung ab. Von 1964 bis 1968 studierte ich an der Universität in Köln Wirtschaftswissenschaften und legte im Dezember 1968 die Diplomprüfung für Volkswirte ab. Anschließend übernahm ich als freier Doktorand in Köln eine Dissertation. Seit September 1969 bin ich in Nürnberg Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Volkswirtschaftlichen Seminar der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990